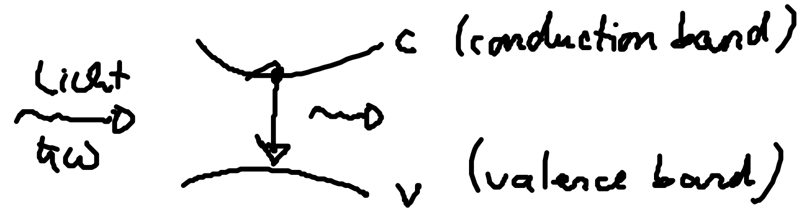
Anmeldung zur Klausur nicht vergessen!

Zusatz III: Quantisierung des elektromagnetischen Felds

Bisher hatten wir einen semiklassischen Ansatz, d.h. die Teilchen wurden quantenmechanisch behandelt und die Felder klassisch. Der Ansatz ist ausreichend für die meisten Probleme der Elektrodynamik.

Ausnahme: – spontane Emission ist ein qm Effekt: Emission von Photonen ohne äußere Einwirkung im Gegensatz zur stimulierten Emission



Läßt sich auf Quantenfluktuationen des elektromagnetischen Felds zurückführen (Energie-Zeit Unschärfe)

- nichtklassische Zustände des Lichts, z.B. kohärente Zustände (Glauber Zustände)
  → unterschiedliche Photonstatistiken (Quantenoptik)

1. Hamilton-Operator

Einfachste Situation: Resonator mit Volumen V

Vakuum als Grenzfall $V \to \infty$

Klassische Feldenergie:

$$H = \int d^3r \left[\frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r,t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(r,t) \right]$$

Entwicklung des Felds nach Moden λ:

$$\vec{E}(r,t) = \sum_\lambda \vec{u}_\lambda(\vec{r}) E_\lambda^-(t) + c.c.$$

$E_\lambda^\pm$ zeitabhängige Koeffizienten (→ Amplituden)

Im freien Raum sind $\vec{u}_\lambda(r)$ Lösungen der Wellengleichung

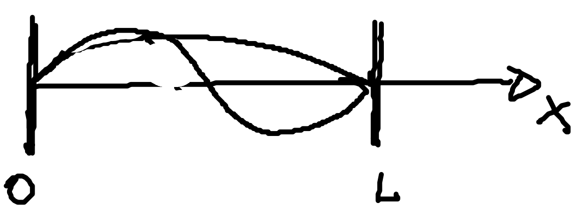
$$\vec{u}_\lambda(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \vec{e}_\sigma(\vec{k})$$

← Polarisationsvektor

Im 1-dim Resonator als einfaches Beispiel

$$u_\lambda = \frac{2}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\lambda\pi}{L} x\right) = \frac{2}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{\omega_\lambda}{c} x\right)$$

mit $\omega_\lambda = \frac{\lambda\pi}{L} c$



stehende Welle

$$\underline{\underline{L = \lambda \frac{\vec{\lambda}}{2}}}$$

$\bar{\lambda}$ Wellenlänge

$E_\lambda^\pm$ sind unbekannt/gesucht.

Zunächst werden dimensionslose Größen $b_\lambda(t)$ eingeführt

$$E_\lambda^- = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}}\; \underline{\underline{b_\lambda^*(t)}}$$

gesuchte Größe

Heuristische Quantisierung:

$b_\lambda, b_\lambda^* \longrightarrow \underline{b}_\lambda, \underline{b}_\lambda^+$ Photon-Erzeuger bzw. Photon-Vernichter

Zahlen $\longrightarrow$ Operatoren die die Boson-Vertauschungsrelation erfüllen

$$[b_\lambda, b_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$
$$= b_\lambda b_{\lambda'}^+ - b_{\lambda'}^+ b_\lambda$$

Hamilton-Operator $H \longrightarrow \underline{H}(\underline{b}_\lambda, \underline{b}_\lambda^+)$

$$H = \int dx \left[\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2(x,t) + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2(x,t) \right]$$

Einfachster Fall: eine Mode λ in z-Richtung polarisiert

$$E_z = E_\lambda^- u_\lambda + c.c$$
$$= \underline{i\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}}\,(b^+ - b)}$$

gesucht ist die B-Komponente

$$\nabla\times B = \frac{1}{c^2}\partial_t E$$

transversale Felder

$$\underline{\underline{\partial_x B_y}} - \partial_y B_x = \frac{1}{c^2}\partial_t E_z$$

Ausbreitung in x-Richtung

E-Feld in z-Richtung

→ B-Feld in y-Richtung

$$\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} \underline{\underline{\partial_t E_z}}$$

Mit $b(t) = b_0 e^{-i\omega t}$ → $-i\omega$

$$\partial_t E_z = - \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}} \; \omega \; (b^+ + b) \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

$$\Rightarrow B_y = -\frac{1}{c^2} \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}} \; \omega \; (b^+ + b) \underbrace{\int dx \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)}_{-\frac{c}{\omega}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)}$$

$$\underline{B_y = \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}} \; \frac{1}{c} \; (b^+ + b) \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right)}$$

Einsetzen der quantisierten Felder in den Hamilton-Operator:

$$H = \int dx \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \underline{B}^2 \right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int dx \left[E^2 + c^2 B^2 \right]$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{2}{L} \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \int dx \left[-(b^+ - b)^2 \sin^2\left(\frac{\omega}{c}x\right) + (b^+ + b) \cos^2\left(\frac{\omega}{c}x\right) \right]$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \underline{\underline{\frac{2}{L}}} \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0} \left[-(b^+ - b)(b^+ - b)\left(\underline{\underline{\frac{L}{2}}} - \frac{\sin\left(\frac{2\omega}{c}L\right)}{4\frac{\omega}{c}} \right) + (b^+ + b)(b^+ + b)\left(\underline{\underline{\frac{L}{2}}} + \frac{\sin\left(\frac{2\omega}{c}L\right)}{4\frac{\omega}{c}} \right) \right]$$

→ 0

ω Eigenfrequenz → 0

$$\omega = \pi c \frac{?}{L}$$

$$\sin\left(2\frac{\omega}{c}L\right) = \sin(2\pi\lambda) = 0$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\left[-(b^+-b)(b^+-b) + (b+b^+)(b+b^+)\right]$$

$$= \frac{\cancel{\varepsilon_0}}{2}\frac{\hbar\omega}{2\cancel{\varepsilon_0}}\left(\underbrace{bb^+}_{1+b^+b} + b^+b + bb^+ + b^+b\right)$$

da $bb^+ - b^+b = 1$

$$\boxed{H = \hbar\omega\left(b^+b + \frac{1}{2}\right)}$$

Hamilton-Operator einer Lichtmode entspricht dem eines harmonischen Oszillator mit der Quantisierungsenergie $\hbar\omega$. Photon $\hat{=}$ Quant des em Felds

Im allgemeinen Fall mit mehreren Moden:

$$H = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(b_\lambda^+ b_\lambda + \frac{1}{2}\right)$$

$b_\lambda^+ b_\lambda$ ist die Anzahl der Photonen in der quantisierten Mode λ

b_λ^+ erzeugt ein Photon in der Mode λ

b_λ vernichtet ein Photon in der Mode λ

2. Spontane Emission

Zeitliche Dynamik der Photonenzahl $b_\lambda^+ b_\lambda$ wird berechnet.

Heisenberg Bewegungsgl. $i\hbar \frac{d}{dt} b_\lambda^+ b_\lambda = [b_\lambda^+ b_\lambda, \underset{a^+a(b^+-b)}{H}]_-$

$$= \hbar\Omega^* \underbrace{b_\lambda^+ a_{vk}^+ a_{ck}}_{\text{photon-assistierte Größe}} + c.c$$

Kommutieren unter Ausnutzung der Vertauschungsrelation

Rabi-Frequenz $\Omega = \frac{d_{vc} E_0}{\hbar}$, $d_{vc} \hat{=}$ Dipol-Matrix-element

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_\lambda^+ a_{vk}^+ a_{ck} = \hbar\Omega \Big[b_\lambda^+ b_\lambda \big(\underbrace{a_{vk}^+ a_{vk}}_{= f_{vk}} - \underbrace{a_{ck}^+ a_{ck}}_{f_{ck}} \big) - \underbrace{(1 - a_{vk}^+ a_{vk})}_{f_{hk}} \underbrace{(a_{ck}^+ a_{ck})}_{f_{ck}} \Big]$$

formal integriert im Rahmen der Markov-Approximation

Loch (h) $\hat{=}$ fehlendes Elektron

Einsetzen in $i\hbar (b_\lambda^+ b_\lambda)^{\cdot}$:

$$\frac{d}{dt} \underbrace{b_\lambda^+ b_\lambda}_{\text{Photonzahl}} = |\Omega|^2 \Big(\underbrace{b_\lambda^+ b_\lambda (1 - f_{hk} - f_{ck})}_{①} + \underbrace{f_{ck} f_{hk}}_{②} \Big) \frac{2\gamma}{(\omega_k - \omega_\lambda)^2 + \gamma^2}$$

γ: phänomenologische Konstante

① Induzierte Emission und Absorption proportional zur Photon-Besetzung $b_\lambda^+ b_\lambda$

② Spontane Emission unabhängig von äußeren Einflüssen

3. Quantenzustände des Strahlungsfelds im freien Raum

3.1. Schrödinger-Gleichung

$$\hbar\omega\left(b^+b+\tfrac{1}{2}\right)\underline{\Phi_n} = \underline{\mathcal{E}_n}\Phi_n$$

Eigenenergien $\mathcal{E}_n$ und Eigenfunktionen Φ_n gilt es zu bestimmen. Lösung erfolgt analog zum harmonischen Oszillator in der QM:

i) Eigenenergien: $\mathcal{E}_n = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$

$n \hat{=}$ Anzahl der Photonen in der betrachteten Mode

ii) Eigenfunktionen: $\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\underline{b}^+\right)^n\Phi_0$

beschreibt einen Zustand mit n Photonen in der Mode, wobei Φ_0 der Vakuumzustand ist.

iii) $b^+b = \underline{n}$ Photonzahloperator

$\underline{n}\,\Phi_n = n\,\Phi_n$

$b\,\Phi_n = \sqrt{n}\,\Phi_{n-1}$

$b^+\Phi_n = \sqrt{n+1}\,\Phi_{n+1}$

iv) Allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gl.

$$\Phi(t) = \sum_n c_n \Phi_n e^{-i\frac{\mathcal{E}_n}{\hbar}t}$$ dargestellt als

Überlagerung der Eigenfunktionen Φ_n.

$|c_n|^2$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung n Photonen vorzufinden.

3.2 Charakterisierung möglicher Zustände

Erwartungswert und Schwankung vom E-Feld und der Photonenzahl n für festgelegten Zustand ϕ:

$$\langle \underline{E} \rangle = (\phi, \underline{E}\,\phi) \;;\; \langle (\Delta E)^2 \rangle = (\phi, (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)\phi)$$

$$\langle n \rangle = (\phi, \underline{n}\,\phi) \;;\; \langle (\Delta n)^2 \rangle = (\phi, (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2)\phi)$$

mittleres Meßergebnis und dessen statistische Schwankung um den Mittelwert.

Die Ergebnisse sind vom Zustand ϕ, in dem sich das Strahlungsfeld befindet, abhängig:

I Fockzustand (Photonenzahl-Zustand)

II Kohärenter Zustand (Glauber Zustand)

III Thermische Zustand