

1.5 Dynamik im Schrödinger-, Heisenberg-, Wechselwirkungsbild

Betrachte zeitabhängige Zustände $|\psi\rangle_t$:

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_t = \hat{H} |\psi\rangle_t} \quad \text{zeitabh. Schrödinger-gl.}$$

Formale Lösung:

$$\boxed{|\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi\rangle_0 = U(t, 0) |\psi\rangle_0}$$

Def. über Potenzreihe:

$$U(t,0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} := \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right)^{\nu} \hat{H}^{\nu} \quad \text{Zeitentw.op.}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right)^{\nu} \hat{H}^{\nu} |\psi\rangle_0 = \hat{H} \underbrace{\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1)!} \left(-\frac{i}{\hbar} t\right)^{\nu-1} \hat{H}^{\nu-1} |\psi\rangle_0}_{|\psi\rangle_t}$$

$U(t,0)$ ist unitärer Op., da \hat{H} hermitesch.

Adjungierte Schrödingergl.

$$\langle \psi | \hat{H} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi |$$

Formale Lösung:

$$\langle \psi | = \langle \psi |_0 e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} = \langle \psi | U^{\dagger}(t,0)$$

Erwartungswert eines Op. $\hat{F} = \hat{F}(\hat{x}, \hat{p}, t)$

(explizite Zeitabh., z.B.)
über $\underline{A}(t)$

$$\langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle_t$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle_t$$

$$= \langle \psi | \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} | \psi \rangle + \underbrace{\left(\frac{\partial \langle \psi |}{\partial t} \right) \hat{F} | \psi \rangle}_{-\frac{i}{\hbar} \langle \psi | \hat{H}} + \langle \psi | \hat{F} \underbrace{\left(\frac{\partial | \psi \rangle}{\partial t} \right)}_{\frac{i}{\hbar} \hat{H} | \psi \rangle}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle = \langle \psi | \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] \right) | \psi \rangle$$

Für einen nicht explizit t -abhängigen Op. \hat{F} gilt:

$$[\hat{H}, \hat{F}] = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle = 0$$

Klassisches Analogon: Poisson-Klammer

Sei $F(q, p, t)$ klass. Obs., $H(q, p)$ klass. Hamilton fkt.

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \\ &\quad \text{Poisson-Klammer} \end{aligned}$$

Also

$$\{H, F\} \longrightarrow -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}]$$

Definiere Observable „zeitliche Veränderung von $F(q, p, t)$ “

$$\langle \dot{F} \rangle := \frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle$$

$$\text{Operator } \dot{F} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}$$

Fundamentalbeziehung der Dynamik der Quantentheorie

- keine Def. für \hat{F} , da i.a. $\hat{F} \neq \frac{d}{dt} F$,
vielmehr ist \hat{F} def. über Erwartungswert $\langle \hat{F} \rangle := \frac{d}{dt} \langle F \rangle$!

speziell gilt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}] \\ \dot{\hat{p}} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}] \end{aligned} \right\} \hat{=} \text{klass. Hamilton'sche Gln.}$$

Mit $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$, $[\hat{H}, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{p}_k}$, $[\hat{H}, \hat{p}_k] = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \hat{H}}{\partial \hat{x}_k}$

folgt

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\hat{p}}{m}$$

$$\dot{\hat{p}} = -\nabla V(\hat{x})$$

Daraus folgt das Ehrenfest'sche Theorem:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle$$
$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \langle \nabla V(\hat{x}) \rangle$$

d.h. die Erwartungswerte gehorchen den klass. Beweg.gln.

Bilder:

Da Erwartungswerte invariant bei unitären Trafos U sind, sind Operatoren und Zustände nur bis auf Unitär-Äquivalenz festgelegt:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \\ \hat{F} &\rightarrow \hat{F}' = U\hat{F}U^\dagger \end{aligned}$$

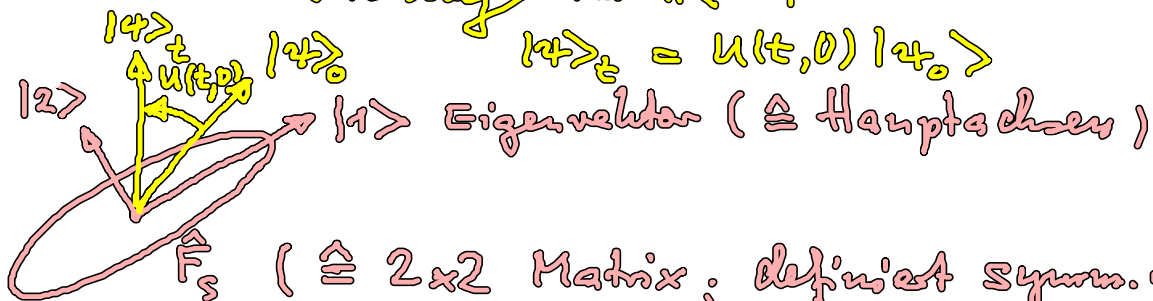
Für verschiedene, zeitabh. U erhält man verschied. Bilder (in Folgenden sei $\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} = 0$) :

(a) Schrödinger-Bild :

Operatoren $\hat{F}_S(\hat{x}, \hat{p})$ zeitunabh.
 Eigenvektoren $|n\rangle$ zeitunabh.
 Zustandsvektoren $|\psi\rangle_t$ zeitabh.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_t = \hat{H} |\psi\rangle_t$$

Veranschaulichung in \mathbb{R}^2 :



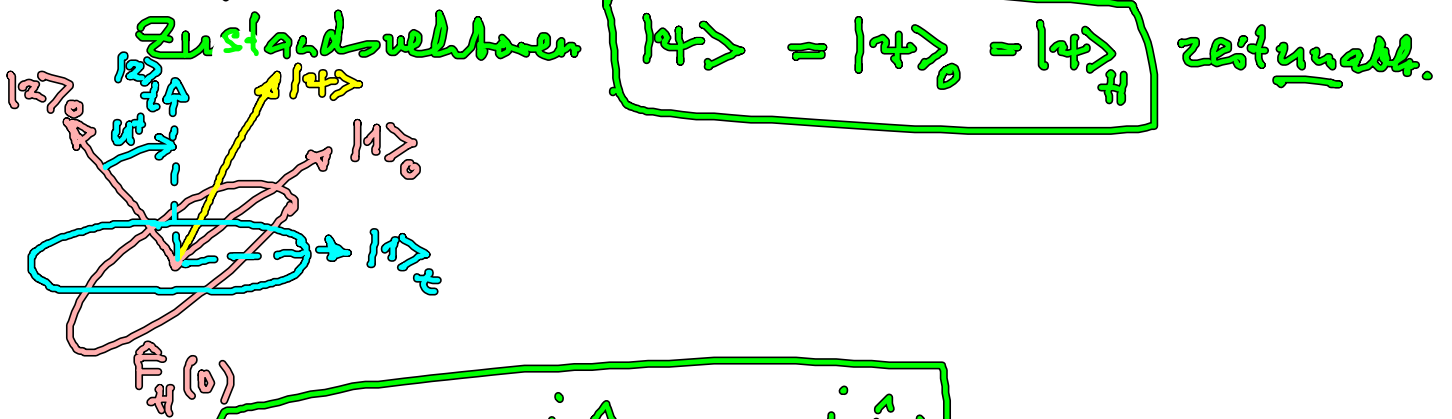
\hat{F}_S ($\hat{=}$ 2×2 Matrix; definiert Symm. quadrat.
 Form $x^T A x = 1$)

(b) Heisenberg-Bild

$$\langle \hat{F}_S \rangle_t = \langle \psi | \hat{F}_S | \psi \rangle_t = \langle \psi | \underbrace{U^\dagger(t,0) \hat{F}_S U(t,0)}_{\hat{F}_H(t)} | \psi \rangle_0$$

Operatoren $\hat{F}_H(t)$ zeitabhängig $\hat{F}_H(t)$

Eigenvektoren $|n\rangle$ zeitabh.



Aus $\hat{F}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$

folgt $\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} \hat{H} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{F}_S (-\frac{i}{\hbar} \hat{H}) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$

$\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}_H]$

d.h. $\hat{F} = \frac{d}{dt} \hat{F}_H$
in Heisenberg-Bild

Insbesondere:

$\frac{d\hat{H}_H}{dt} = 0$

also

$\hat{H}_H = \hat{H}_S = \hat{H}$

bildunabh.

(c) Wechselwirkungs-Bild
(Dirac-Bild)

Sei $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$ mit \hat{H}^0 ungestörte Ham.op.
 H^1 Störung

$$\hat{F}_w(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} \hat{F}_s e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{F}_w}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}^0, \hat{F}_w]$$

$$\frac{d\hat{H}^0}{dt} = 0 \Rightarrow \hat{H}^0 \text{ bildunabh.}$$

$$\frac{d\hat{H}_w}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}^0, \hat{H}_w] = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}^0, \hat{H}_w^1] \neq 0 \quad \text{ia.}$$

$${}_t \langle \psi | \hat{F}_s | \psi \rangle_t = \underbrace{{}_t \langle \psi |}_w \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} \hat{F}_s e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t}}_{\hat{F}_w(t)} \underbrace{| \psi \rangle_t}_{| \psi \rangle_w}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} | \psi \rangle_w = \frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} | \psi \rangle_t + e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} \frac{d}{dt} | \psi \rangle_t$$

$$\frac{1}{i\hbar} \hat{H}_s | \psi \rangle_t = \frac{\hat{H}_s}{i\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} | \psi \rangle_w$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left(-\hat{H}^0 | \psi \rangle_w + \hat{H}_w | \psi \rangle_w \right)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left(-\hat{H}^0 + \hat{H}^0 + \hat{H}_w^1 \right) | \psi \rangle_w$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi \rangle_w = \hat{H}_w^1 | \psi \rangle_w$$

Operatoren \hat{F}_w } zeitabh. durch ungestörten
 Eigenvektoren $|n\rangle$ } Ham.op. \hat{H}^0

Zustandsvektoren $| \psi \rangle_w$ zeitento. durch Stör.op. \hat{H}_w^1