

4.5 Das ideale Bosegas

analog wie Fermigas, nur Besetzungszahlen $N_j = 0, 1, 2, \dots$

großkanon. Zustandssumme:

$$\Xi = \sum_{N_1, \dots, N_2} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\}$$

$$\stackrel{\text{Bosonen}}{=} \prod_j \left[\sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j} \right] \quad \text{mit } t_j := \exp[\beta(\mu - E_j)]$$

$$= \prod_j \underbrace{\frac{1}{1 - t_j}}_{\Xi_j}$$

geomet. Reihe konvergiert
genau dann, wenn $t_j < 1$,
also $\boxed{E_j > \mu}$

Wahrscheinl., die Besetzungszahlen N_1, N_2, \dots der 1-Teilchen-Zust.
 E_1, E_2, \dots zu finden

$$\begin{aligned} P(N_1, N_2, \dots) &= \Xi^{-1} \exp \left\{ -\beta \sum_j (E_j - \mu) N_j \right\} \\ &= \prod_j \underbrace{(1 - t_j) t_j^{N_j}}_{p(N_j)} \quad \text{separiert!} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(N_j) = \underbrace{(1 - \exp \beta(\mu - E_j))}_{e^{-t_j}} \exp \left\{ \beta(\mu - E_j) N_j \right\}$$

Mittlere Besetzungszahl im Zustand E_j :

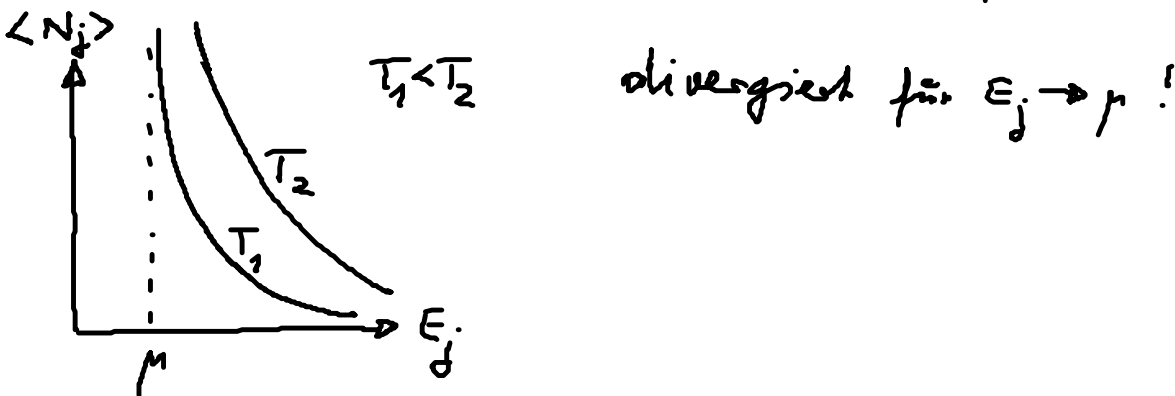
$$\langle N_j \rangle = \frac{\partial \ln Z_j}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_j = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln(1-t_j) = \frac{t_j}{1-t_j} = \frac{1}{t_j^{-1}-1}$$

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{kT}\right] - 1}$$

Bose-Verteilung

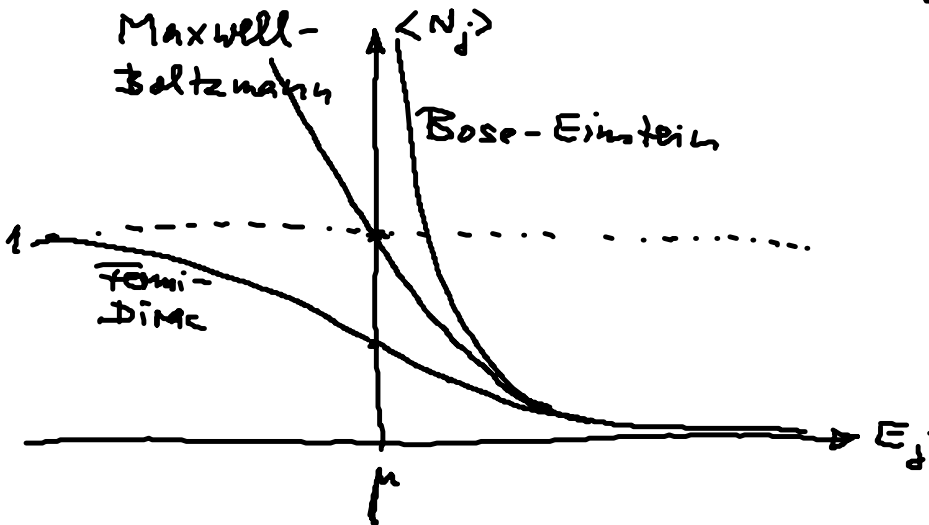
(folgt auch explizit aus $\langle N_j \rangle = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j p(N_j) = \sum_{N_j=0}^{\infty} N_j (1-t_j) t_j^{N_j}$)

$$\langle N_j \rangle = (1-t_j) t_j \frac{d}{dt_j} \sum_{N_j=0}^{\infty} t_j^{N_j} = (1-t_j) t_j \frac{1}{(1-t_j)^2}$$



Vergleich aller 3 Verteilungen:

$$\langle N_j \rangle = \frac{1}{\exp\left[\frac{E_j - \mu}{kT}\right] - \epsilon} \quad \text{mit } \epsilon = \begin{cases} -1 & \text{Fermi-Dirac} \\ 0 & \text{Maxwell-Boltzmann} \\ 1 & \text{Bose-Einstein} \end{cases}$$



Übergang zum Quasikontinuum der Zustände $E = \frac{p^2}{2m}$

$$\ln \Xi = \sum_j \ln \Xi_j = - \sum_j \ln (1 - \zeta e^{-\beta E_j}) \quad (\zeta = e^{\beta \mu} \text{ Fugazität})$$

$$\approx - (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \ln [1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}]$$

$$\text{part. Int.} = - (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \left\{ \underbrace{\frac{p^3}{3} \ln [1 - \zeta e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}]}_0^\infty - \int_0^\infty dp \frac{p^3}{3} \frac{\frac{\beta p^2}{2m} \zeta e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}}{1 - \zeta e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}} \right\}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{\beta p^2}{2m}}{\zeta \exp\{\frac{\beta p^2}{2m}\} - 1}$$

$$= \frac{2}{3} \beta (2S+1) \frac{V}{h^3} \int_0^\infty dp 4\pi p^2 \langle N(p) \rangle E(p)$$

$$= \frac{2}{3} \beta U$$

$$\Rightarrow \boxed{pV = kT \ln \Xi = \frac{2}{3} U} \quad \text{wie für Fermigas}$$

Verdünntes Bosegas (quasiklass., nichtentarteter Grenzfall)

Entwicklung nach Potenzen von $\zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$

gesamte Teilchenzahl:

$$\bar{N} = \sum_j \langle N_j \rangle \approx (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{1}{\exp\{(\frac{p^2}{2m} - \mu)/(kT)\} - 1}$$

d.h. $\mu < 0$

$$\left(\frac{p^2}{2mkT} =: y\right) = \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty dy \frac{y^{1/2}}{\zeta^{-1} e^y - 1}$$

$$\bar{N} = \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} \int_0^\infty dy y^{1/2} \frac{\zeta e^{-y}}{1 - \zeta e^{-y}}$$

$$\approx \underbrace{\zeta \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-y}}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} + \underbrace{\zeta^2 \int_0^\infty dy y^{1/2} e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{5/2}}\sqrt{\pi}} + \dots$$

$$\bar{N} \approx V \frac{2S+1}{\lambda^3} \underbrace{\zeta}_{e^{\frac{\mu}{kT}}} \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \underbrace{e^{\frac{\mu}{kT}}}_{\zeta} \right] \quad \text{mit } \lambda := \left(\frac{h^2}{2\pi mkT}\right)^{1/2} = \left(\frac{2S+1}{N_c}\right)^{1/3}$$

↑ ζ therm. Wellenlänge

Quantenkorrektur

Elim. von μ durch \bar{N} :

0. Näherung $\bar{N} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \zeta$

1. Näh. $\bar{N} = V \frac{2S+1}{\lambda^3} \zeta \left[1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$

$\Rightarrow \zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \approx \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \left[1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{\bar{N} \lambda^3}{V(2S+1)} \right]$

Innere Energie:

$$U = (2S+1) \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \frac{\frac{p^2}{2m}}{\exp\left\{\left(\frac{p^2}{2m} - \mu\right)/(kT)\right\} - 1}$$

$$= \frac{2S+1}{2} \frac{4\pi V}{h^3} (2mkT)^{3/2} kT \int_0^\infty dy y^{3/2} \frac{\zeta e^{-y}}{1 - \zeta e^{-y}}$$

$$\approx \underbrace{\zeta \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-y}}_{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}} + \underbrace{\zeta^2 \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-2y}}_{\frac{1}{2^{5/2}} \frac{3}{4}\sqrt{\pi}} + \dots$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT V \frac{2S+1}{\lambda^3} e^{\frac{\mu}{kT}} \left[1 + \frac{1}{2^{5/2}} e^{\frac{\mu}{kT}} \right]$$

$$U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

Kolon. Zustandsgl.

↑
Quantenkorrektur

$$pV = \frac{2}{3} U = kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N} \right]$$

therm. Zustandsgl.

↑
Bose-Anziehung: Quantenkorrektur
(erweitertes Druck)

Bose-Einstein-Kondensation (theor.: Einstein 1925
exp.: Ketterle, Cornell & Wieman 95)
Nobelpreis 2001

Grundzustand des Bose-Gases: $E_0 = 0$

$$\Rightarrow \langle N_0 \rangle = \frac{1}{\xi^{-1} - 1} = \frac{\xi}{1 - \xi}$$

Die mittlere Besetzungszahl dieses Quantenzustandes kann makroskopisch groß werden für $\xi \approx 1$,

d. h. $\langle N_0 \rangle \approx \bar{N}$ (alle Teilchen im Grundzustand kondensiert)

allg. $\bar{N} = \langle N_0 \rangle + N'$ mit $N' = \sum_{j>0} \langle N_j \rangle$

(i) $\xi \ll 1$ (normale Phase): $\langle N_0 \rangle$ vernachlässigbar
 \Rightarrow verdünntes Bosegas

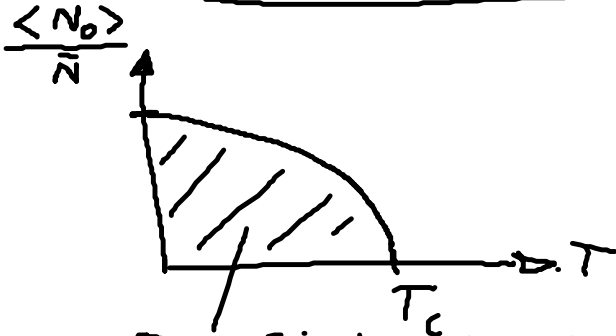
(ii) $\xi \approx 1$ (kondensierte Phase): $N' \approx \sum_{j>0} \frac{1}{e^{\beta E_j} - 1} \ll \bar{N}$

normale Komp. $\frac{N'}{V}$ kontin. $\approx (2S+1) \lambda^{-3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^{\infty} dy y^{1/2} e^{-y}}_1$ verdünntes Bosegas
 $\sim T^{3/2}$

$$\Rightarrow \frac{N'}{\bar{N}} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad T_c \text{ def. durch } \xi \approx 1$$

$$\Rightarrow \frac{\langle N_0 \rangle}{\bar{N}} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} & \text{für } T < T_c \\ 0 & T \geq T_c \end{cases}$$

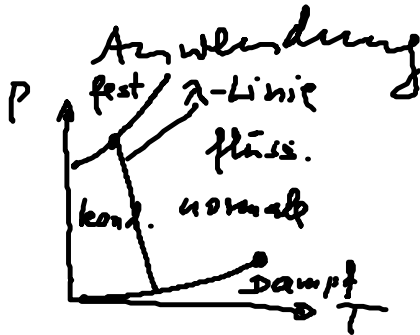
Bruchteil der kondensierten Teilchen



Bose-Einstein-Kondensation: 2-komponentiges Gas: normale + kondensierte Komponente

Phasenübergang bei T_c : normale Phase \rightarrow kondensierte Phase

• makroskop. Quantenphänomen!



Anwendung: Suprafluide Phase von ^4He bei tiefen Temp. ähnelt 2-komp. Flüss. aus normaler u. kond. Phase (Fritz London)

aber: stark wechselwirkendes Bosegas!!

Bose-Einstein-Kondensation mit schwach WW Gasen

Vor. für exp. Beob. $\frac{\bar{N}}{V} \cdot 2^3 > 2.61$

- hohe Phasendichte
- sehr tiefe Temp. ($< 1 \mu\text{K}$ bei $\frac{\bar{N}}{V} \sim 10^{14} \text{ cm}^{-3}$)

\rightarrow Laserkühlung von Atomen (Nobelpreis Chu, Phillips, Cohen-Tannoudji 1997)
+ Verdampfungskühlung \Rightarrow 90-95% Kondensat

Cornell & Wieman: Rb-Atome (1995) $\sim 10^3$ Atome

Kellerle: Na-Atome (") 10^5 Atome

• kohärenter makroskop. Quantenzustand

- Atomlaser: kohärente stimulierte Em. v. Atomstrahlen
→ Interferenz (Ketterle; Hänsch 1999)