Wdh.: $|\psi^+\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\varepsilon} \hat{H}^1 |\psi^+\rangle$

Lippmann Schwinger Gleichung

asympt. Näherung:

$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{i\underline{k}\underline{r}} + f(\underline{e}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

mit Streuamplitude

$$f(\underline{e}) := -\frac{2m}{\hbar} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik\underline{e}\underline{r}'} V(\underline{r}') \psi^+(\underline{r}')$$

diff. Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\underline{e})|^2$

totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma = \int d\Omega \, |f(\underline{e})|^2$

6.3. Bornsche Näherung

Störungstheoretische Näherung für große Einstrahlungsenergie

$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg V(\underline{r})$: $\hat{H}^1$ als kleine Störung

1. Ordnung Störungsrechnung der Lippmann-Schwinger-Gl.:

$$\boxed{|\psi^+\rangle = |\phi\rangle + \hat{G}_+ \hat{H}^1 |\phi\rangle \qquad \text{1. Born'sche Näherung}}$$

In Ortsdarstellung:

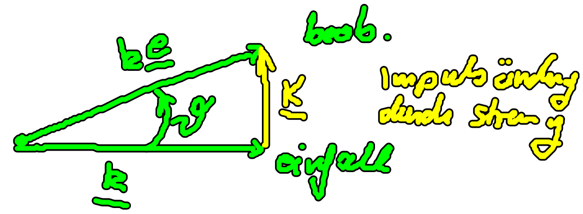
$$\psi^+(\underline{r}) \approx \psi_e(\underline{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3r'\, G_+(\underline{r}-\underline{r}')\, V(\underline{r}')\, \psi_e(\underline{r}')$$

mit $\psi_e(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\underline{r}}$

<u>Streuamplitude</u> in 1. Bornschen Näherung

$$f(\underline{e}) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, V(r')\, e^{i\underline{K}\underline{r}'}$$

mit $\underline{K} := \underline{k} - k\underline{e}$



d.h.: Streuamplitude ~ Fouriertransformierte von $V(r)$

Kugelsymmetrisches Potenzial $V(r)$:

Parametrisierung von $\underline{e}$ durch (ϑ, φ) $\qquad K = |\underline{k} - k\underline{e}| = \sqrt{k^2 + k^2 - 2k^2\cos\vartheta}$

$$= 2k \sin\frac{\vartheta}{2}$$

Integration d^3r' in Kugelkoordinaten $(r', \vartheta', \varphi')$ um K-Achse

$$\underline{K}\underline{r}' = Kr'\cos\vartheta' \qquad d^3r' = r'^2 dr'\, d(\cos\vartheta')\, d\varphi'$$

$f(\underline{e})$ hängt aus Symmetriegründen nicht von φ ab:

$$f(\vartheta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr'\, r'^2\, V(r') \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta')\, e^{iKr'\cos\vartheta'}}_{\frac{1}{iKr'}\left(e^{iKr'} - e^{-iKr'}\right) = 2\frac{\sin Kr'}{Kr'}} \int_0^{2\pi} d\varphi'$$

$$\boxed{f(\vartheta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{K}\int_0^\infty dr'\, r'\, V(r')\sin Kr'} \qquad K = 2k\sin\frac{\vartheta}{2}$$

Rutherford-Streuung: Streuung eines Z_1 fach geladenen Teilchens an einem Z_2-fach geladenen $\to V(r) = -\dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$\to$ Konvergenzschwierigkeiten, daher betrachte Yukawa-Potenzial

$$V(r) = \frac{a}{r} e^{-\varkappa r} \qquad \text{mit } \varkappa \to 0$$

Für $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon_0 m v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$ ergibt sich dann die klass. mechan. Formel!

Dies ist sogar die exakte QM. Lösung (nicht nur 1. Born'sche Näherung)

NB: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ divergiert für $\vartheta \to 0$ wegen unendlich. Reichweite von $V(r)$

Systematische Störungsentwicklung: $\qquad \hat{R} = \hat{G}_+ \hat{H}^1$

Iteration der Lippmann-Schwinger Gl.: $\quad |\psi^+\rangle = |\phi\rangle + \hat{R}|\psi^+\rangle$

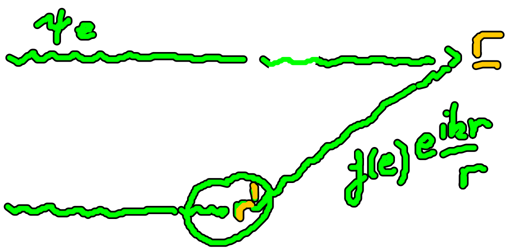
ergibt:
$$|\psi^{(1)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R}|\phi\rangle$$
$$= (1+\hat{R})|\phi\rangle \qquad \text{1. Bornsche Näherung}$$

$$|\psi^{(2)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R}|\psi^{(1)}\rangle$$
$$= (1+\hat{R}+\hat{R}\hat{R})|\phi\rangle$$
$$\vdots$$
$$|\psi^+\rangle = (1+\hat{R}+\hat{R}^2+\hat{R}^3+\dots)|\phi\rangle$$

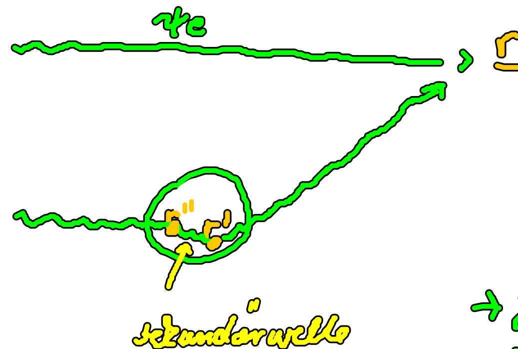
Bornsche Reihe

(konvergente Reihe für kleine V)

Term 1. Ordnung



Term 2. Ordnung



→ für dünne Medien vernachlässigt

7. Relativistische Quantentheorie

Bisher: Schrödingergleichung mit Hamiltonoperator abgeleitet nach dem Korrespondenzprinzip aus dem Hamiltonformalismus der klass. nichtrelativistischen Mechanik

→ Galilei-invariant

Gültigkeit: Teilchengeschw. $v \ll c$

nicht erfasst: z.B. WW Licht Materie
hochenergetischen Elektronen

Jetzt: Lorentz-Invariante Quantentheorie

Schwierigkeit: Teilchenzahlerhaltung gilt nicht mehr wegen $E = mc^2$
(Äquivalenz von Energie und Masse)

$\rightarrow$ relativist. Quantenfeldtheorie erforderlich

<u>hier</u>: nur Quantentheorie eines relativist. Teilchens in einem klass. elektromagn. Feld behandelt

$$\begin{pmatrix} \text{Spin } 0 & \rightarrow \text{Klein-Gordon-Gl.} \\ \text{Spin } \frac{1}{2} & \rightarrow \text{Dirac-Gleichung} \end{pmatrix}$$

7.1. Kovariante Schreibweise der Relativitätstheorie

<u>Grundpostulat</u> der spez. Relativitätsth.

- Kein Inertialsystem ist gegenüber einem anderen ausgezeichnet (Einstein 1904)
- Die Lichtgeschwindigkeit c ist in jedem Inertialsysteme gleich

$$\rightarrow \underline{r}^2 - c^2 t^2 = \underline{r}'^2 - c^2 t'^2$$

(Kugelwellen mit Ausbreitungsgeschw. c sind Lorentz-invariant)

<u>Formalisierung</u>

Der raum-zeitlichen Abstand ds

$(ds)^2 := (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$ bleibt <u>invariant</u> bei

Transformationen zwischen Inertialsystemen (= Lorentztrafo)

Schreibe $(ds)^2$ als Skalarprodukt von $\boxed{\text{4-Zeit-Orts Vektoren}}$ im Minkowski-Raum V und benutze den Formalismus der linearen orthogonalen Transformationen, unter denen das Skalarprodukt invariant ist:

$\boxed{\text{Def.:}}$ kontravariante Komponenten des 4-Zeit-Orts-Vektoren ("Spalten Vektoren")

$x^0 := ct$

$x^\alpha, \quad \alpha = 1,2,3$: kartesische Komponenten des Ortsvektors $\underline{r}$

$\boxed{\text{Def.:}}$ kovariante Komponenten ("Zeilen Vektoren")

$x_0 := x^0$

$x_\alpha := -x^\alpha \qquad \alpha = 1,2,3$

(kovarianter Vektor $\in$ dualer Vektorraum $\tilde{V}$:

$\tilde{V} = \{ \text{lin. Funktional } l : V \to \mathbb{R} \}$

$$\boxed{\begin{aligned}(ds)^2 &= dx^0 dx_0 + dx^1 dx_1 + dx^2 dx_2 + dx^3 dx_3 \\ &= dx^i dx_i\end{aligned}}$$

Verallgemeinerung:

Für beliebige 4-Vektoren a^i gilt: $a_0 = a^0$

$a_\alpha = -a^\alpha \qquad \alpha = 1,2,3$

• Lorentz-Invariante lassen sich als Skalarprodukt $a^i a_i$ schreiben!

Math. Formalismus

Tensor 2. Stufe: A^{ik}, $A^i{}_k$, $A_i{}^k$, A_{ik}

mit $A^{00} = A^0{}_0 = A_0{}^0 = A_{00}$

$A^{10} = A^1{}_0 = -A_1{}^0 = -A_{10}$

$A^{11} = -A^1{}_1 = -A_1{}^1 = A_{11}$

Spur eines Tensors:

$\mathrm{Sp}A = A^i{}_i = A_i{}^i$

4-Einheitstensor

$$\delta^i_k := \delta^i{}_k = \delta_k{}^i = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ symm!

$\delta^i_k a^k = a^i$, $\delta^i_k A^{kl} = A^{il}$ usw.

Metrischer Tensor

$$g^{ik} := \delta^{ik} = \left\{ \begin{array}{ll} \delta^i_k & \text{für } k=0 \\ -\delta^i_k & \text{für } k=1,2,3 \end{array} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$:= g_{ik}$

$$g^{ik} a_k = \delta^{ik} a_k = \begin{cases} a_i & \text{für } i=0 \\ -a_i & \text{für } i=1,2,3 \end{cases} = a^i$$

„Heben oder Senken der Indizes durch g^{ik} bzw g_{ik}"

Lorentz-Transformation (linear, homogen): $\Sigma \to \Sigma'$

$$x'^i = U^i{}_k \, x^k \qquad U^i{}_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } v \parallel x^1$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \; ; \; \beta = \frac{v}{c}$$

Invarianz des Skalarproduktes:

$$\boxed{a'^i = U^i{}_k a^k} \; , \quad b'^i = U^i{}_k b^k$$

$$\to \boxed{b'_i = U_{ik} b^k = U_i{}^l b_l}$$

$$a'^i b'_i = \underbrace{U^i{}_k U_i{}^l}\, a^k b_l \stackrel{!}{=} a^k b_k$$

$$\Rightarrow U^i{}_k U_i{}^l = \delta^l_k$$

erfüllt wenn U orthogonale Trafo

Umkehr-Trafo:

kontravariantes Transformationsverhalten

$$a^i = U_k{}^i a'^k \; , \text{ denn } \; U_k{}^i U^k{}_l a^l = \delta^i_l a^l = a^i$$

$$a_i = U^k{}_i \, a'_k$$

ko-variante Trafo-Verhalten

Transformationsverhalten des 4-Gradienten

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x^i}}_{\partial_i} := \frac{\partial}{\partial x'^k} \underbrace{\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}}_{U^k{}_i} = U^k{}_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x'^k}}_{\partial'_k} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ transformiert sich wie } a_i \text{ (kovariant)}$$

Analog: $\frac{\partial}{\partial x_i}$ transf. wie a^i (kontrav.)