

# Momente einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

$v$ -tes Moment  $M_v := \langle x^v \rangle$

Momentenerzeugende  $Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha^v}{v!} M_v$

Kenntnis aller Momente ist äquivalent zur Wahrsch. verteilung

$\alpha \equiv is$ : Fourier - Inverse von  $Z(is) = \int dx \varrho(x) e^{isx}$

$$\varrho(x) = \frac{1}{2\pi} \int ds Z(is) e^{-isx}$$

Verallg. auf  $d$  Zufallsvar.:

$M_{v_1, v_2, \dots, v_d} = \langle x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_d^{v_d} \rangle$  Momente der Ordnung

$$v := v_1 + v_2 + \dots + v_d$$

Momentenerzeugende  $Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \underline{x}} \rangle = \sum_{v_1, \dots, v_d} \frac{\alpha_1^{v_1} \dots \alpha_d^{v_d}}{v_1! \dots v_d!} M_{v_1, \dots, v_d}$

$$\underline{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$$

Kumulante  $C_{v_1, \dots, v_d} = \langle x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_d^{v_d} \rangle_c$

ist definiert durch die

Kumulanten erzeugende  $\Gamma(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\underline{\alpha} \underline{x}} \rangle = \sum_{v_1, \dots, v_d} \frac{\alpha_1^{v_1} \dots \alpha_d^{v_d}}{v_1! \dots v_d!} C_{v_1, \dots, v_d}$

Eigenschaft:

Kumulanten sind additiv für unkorrelierte Zufallsvar.

(gilt nicht für Momente !!)

Beweis: Seien  $x_1, x_2$  unkorreliert  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$   
 $\underline{x} = (x_1, x_2)$

$$\Rightarrow Z(\underline{\alpha}) = \langle e^{\underline{\alpha} \cdot \underline{x}} \rangle = \int dx_1 dx_2 \rho(x_1) \rho(x_2) e^{\alpha_1 x_1} e^{\alpha_2 x_2}$$

$$= \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle$$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{\alpha}) = \ln Z(\underline{\alpha}) = \ln \langle e^{\alpha_1 x_1} \rangle + \ln \langle e^{\alpha_2 x_2} \rangle \stackrel{!}{=} \Gamma(\alpha_1) + \Gamma(\alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha : \Gamma(\alpha, \alpha) = \ln \langle e^{\alpha \frac{(x_1+x_2)}{x}} \rangle = \sum_{\nu} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \langle (x_1+x_2)^{\nu} \rangle_c$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{\nu} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \langle x_1^{\nu} \rangle_c + \sum_{\nu} \frac{\alpha^{\nu}}{\nu!} \langle x_2^{\nu} \rangle_c$$

$$\Rightarrow \langle (x_1+x_2)^{\nu} \rangle_c = \langle x_1^{\nu} \rangle_c + \langle x_2^{\nu} \rangle_c$$

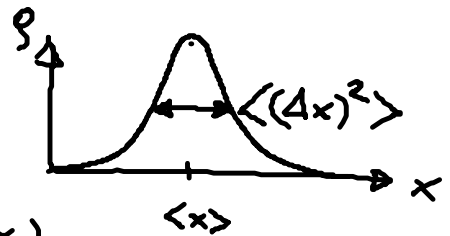
□

Fluktuation  $\Delta x := x - \langle x \rangle$

Es gilt  $\langle \Delta x \rangle = 0$

Varianz:  $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle x \rangle^2$   
 $= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$

Maß für die Breite einer Verteilung



Korrelationsmatrix (Kovarianzmatrix)

$$\langle \Delta x_k \Delta x_l \rangle = \langle x_k x_l \rangle - \langle x_k \rangle \langle x_l \rangle$$

Nichtdiagonalelemente verschwinden für unkorrel. Zufallsvar.!

Zusammenhang zwischen Kumulanten u. Momenten:

$$\langle x \rangle_c = \langle x \rangle \quad \text{mean}$$

$$\langle x^2 \rangle_c = \langle (\Delta x)^2 \rangle \quad \text{variance (Breite)}$$

$\langle x^3 \rangle_c = \langle (\Delta x)^3 \rangle$  skewness (Maß für Asymmetrie)

$\langle x^4 \rangle_c = \langle (\Delta x)^4 \rangle - 3(\langle (\Delta x)^2 \rangle)^2$  kurtosis



Zentraler Grenzwertsatz:

Reihen  $X_1, \dots, X_n$  unkorrelierte Zufallsvar. mit  $\langle X_i \rangle = 0$   
 $\langle (\Delta X_i)^2 \rangle = b_i^2$

Dann konvergiert die Verteilung für  $n \rightarrow \infty$  gegen

Gaußverteilung  $g(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right)$

(Normalverteilung)

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle_c, \quad \langle x^k \rangle_c = 0 \text{ für } k > 2$$

## 1.2 Markov-Prozesse

Stochastischer Prozess:

Zeitentwicklung einer Zufallsvar.  $X(t)$

zeitabhängige Verbundwahrscheinl.  $p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$

mit Realisierungen  $x_1, x_2, x_3, \dots$  von  $X(t)$

bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = \frac{p(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)}{p(x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)}$$

$(t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots)$

Markov-Prozess:

$$p(x_1, t_1 | x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2)$$

nicht die ganze Vergangenheit ( $t_2, t_3, t_4, \dots$ )

bestimmt die Zukunft ( $t_1$ ), sondern nur die Gegenwart ( $t_2$ )

→ stochast. Prozess „ohne Gedächtnis“

$$\text{also: } p(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2; x_3, t_3; \dots)$$

$$= p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) p(x_3, t_3; \dots)$$

$$= p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3) \dots p(x_{n-1}, t_{n-1} | x_n, t_n) p(x_n, t_n)$$

$$t_1 \leftarrow t_2 \leftarrow t_3 \leftarrow \dots \leftarrow t_{n-1} \leftarrow t_n$$

(Markov-Kette)

Für Verbundwahrscheinl. unkorrelierter Ereignisse gilt:

$$\sum_B P(A \cap B \cap C) = \sum_B P(B) P(A \cap C) = P(A \cap C)$$

Also gilt immer (auch nicht-Markov):

$$p(x_1, t_1) = \int dx_2 p(x_1, t_1; x_2, t_2)$$

(Def. bed. W)

$$= \int dx_2 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2)$$

$$\text{kurz: } p(1) = \int dx_2 p(1|2) p(2) \quad (1)$$

$$p(1|3) = \int dx_2 p(1, 2|3)$$

$$= \int dx_2 \frac{p(1, 2; 3)}{p(3)} = \int dx_2 \frac{p(1, 2; 3)}{p(2, 3)} \frac{p(2, 3)}{p(3)}$$

$$= \int dx_2 p(1|2; 3) p(2|3) \quad (2)$$

Markov-Annahme:  $p(1|2; 3) = p(1|2)$

$$\Rightarrow p(1|3) = \int dx_2 p(1|2) p(2|3) \quad (3)$$

$$p(x_1, t_1 | x_3, t_3) = \int dx_2 p(x_1, t_1 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_3, t_3)$$

Chapman-Kolmogorov-Gleichung

(Funktionalgl. für bedingte Wahrscheinl.)

diskrete Ereignisse:

$$P(n_1, t_1 | n_3, t_3) = \sum_{n_2} P(n_1, t_1 | n_2, t_2) P(n_2, t_2 | n_3, t_3)$$

## Stationärer stoch. Prozess:

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; x_3, t_3; \dots) = P(x_1, t_1 + \varepsilon; x_2, t_2 + \varepsilon; x_3, t_3 + \varepsilon; \dots)$$

(Zeittranslationsinvarianz)

$$\Rightarrow P(x, t) = P(x) \quad \text{zeitunabh.} \quad (\Rightarrow \langle x \rangle \text{ zeitunabh.})$$

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x_1, t_1 - t_2; x_2, 0) \quad (\Rightarrow \langle x(t)x(t+\tau) \rangle)$$

$$P(x_1, t_1 | x_2, t_2) = P(x_1, t_1 - t_2 | x_2, 0) = G(\tau) = G(-\tau)$$

(notw. + hinr. für stationären Markov-Prozess)

## Ergodizität

Für stationäre Prozesse: Ensemble-Mittel  $\stackrel{!}{=} \text{Zeitmittel}$

$$\text{Zeitmittel } \bar{X}(T) := \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t), \quad T \rightarrow \infty$$

$$\langle \bar{X}(T) \rangle = \langle x \rangle$$

$\Rightarrow$  Berechnung des Autokorrelationsfkt durch Zeitmittel;

$$G(\tau) := \langle x(t)x(t+\tau) \rangle \stackrel{!}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt x(t)x(t+\tau)$$

Zusammenhang mit spektralen Eigenschaften:

$$\text{Fourier-Transform } \hat{x}(\omega; T) := \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt e^{i\omega t} x(t)$$

$$\text{Es gilt } G(\tau) = G(-\tau)$$

Spektrale Leistungsdichte (power spectral density)

$$\begin{aligned}
S(\omega) &:= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \left| \hat{x}(\omega; T) \right|^2 \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\pi}{T} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T dt' e^{i\omega(t-t')} x(t) x(t') \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int dt e^{-i\omega t} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt x(t) x(t+\tau)}_{G(\tau)}
\end{aligned}$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} G(\tau)$$

Wiener - Khindin - Theorem

Umkehrung:

$$G(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega\tau} S(\omega)$$

homogener stoch. Prozess:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(x, t | x', 0) = p(x) \quad \left( \text{stat. Prozess wird von jeder Anfangsbed. erreicht} \right)$$