Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$\boxed{\dot{x} = -kx + \sqrt{2D}\,\xi(t)}$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$
$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t-t')$$

FP-Gl.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}p = \frac{\partial}{\partial x}(kxp) + D\frac{\partial^2}{\partial x^2}p}$$

$$p = p(x,t|x_0,t_0)$$

zeitabh. Lösung: $\langle X(t)\rangle_{x_0 t_0} = x_0\, e^{-k(t-t_0)}$

$$\langle \Delta X^2 \rangle_{x_0 t_0} = \frac{D}{k}\left(1 - e^{-2k(t-t_0)}\right)$$

Autokorrel. fkt. (stationär; $t_0 \to -\infty$)

$$\langle X(t_1)X(t_2)\rangle_{x_0 t_0} = \iint dx_1 dx_2\; x_1 x_2\, p(x_1,t_1;x_2,t_2|x_0 t_0) \qquad t_1 \geq t_2 \geq t_0$$

$$= \int dx_2 \underbrace{\left[\int dx_1 x_1 p(x_1,t_1|x_2 t_2)\right]}_{\langle x_1\rangle_{x_2 t_2} = x_2 e^{-k(t_1-t_2)}} x_2 \underbrace{p(x_2,t_2|x_0,t_0)}_{\sqrt{\frac{k}{2\pi D}}\exp\left[-\frac{k}{2D}x_2^2\right]\ (t_0\to-\infty)}$$

$$= e^{-k(t_1-t_2)} \underbrace{\int dx_2\, x_2^2\, p^*}_{\langle X^2\rangle_* = \underbrace{\langle \Delta X^2\rangle_*}_{D/k} + \underbrace{\langle X\rangle_*^2}_{0}}$$

$$= \frac{D}{k}e^{-k|t_1-t_2|}$$

exponentielle Korrelation mit Korrelationszeit $\tau_c = \frac{1}{k}$

$$\boxed{G(\tau) \equiv \langle X(t+\tau)X(t)\rangle = \frac{D}{k}e^{-k|\tau|} = \frac{D}{k}e^{-|\tau|/\tau_c}}$$

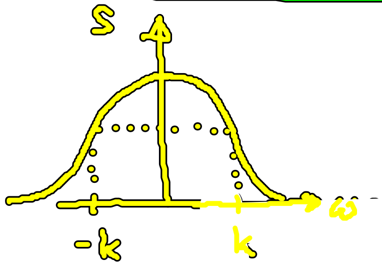
Spektrale Leistungsdichte $S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau}G(\tau)$

$$S(\omega) = \frac{D}{2\pi k}\int_0^{\infty} d\tau\, e^{-k\tau}\left(e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}\right)$$

$$= \frac{D}{2\pi k}\left[\frac{-1}{k+i\omega}\, e^{-kt-i\omega t}\Big|_0^{\infty} + \frac{-1}{k-i\omega}\, e^{-kt+i\omega t}\Big|_0^{\infty}\right]$$

$$\boxed{S(\omega) = \frac{D}{2\pi k}\left(\frac{1}{k+i\omega} + \frac{1}{k-i\omega}\right) = \frac{D}{\pi}\,\frac{1}{\omega^2+k^2}}$$

<u>Lorentzkurve</u>
(Halbwertsbreite $2k$)



<u>Direkte Lösung der Langevin-Gl.</u> $\dot{x} = -kx + \sqrt{2D}\,\xi(t)$:

Subst. $y = x e^{kt}$

$$\dot{y} = (\dot{x} + kx)\, e^{kt}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y} = \left[-kx + \sqrt{2D}\,\xi(t)\right] e^{kt} + kx e^{kt}$$

$$\dot{y} = \sqrt{2D}\, e^{kt}\, \xi(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sqrt{2D}\int_0^t e^{kt'}\,\xi(t')\,dt' + y(0)$$

$y(0) = x(0)$ Anf. Bed.

$$\boxed{x(t) = x(0)\,e^{-kt} + \sqrt{2D}\int_0^t e^{-k(t-t')}\,\underbrace{\xi(t')\,dt'}_{dW'}}$$

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle\, e^{-kt} + \underbrace{\sqrt{2D}\int_0^t e^{-k(t-t')}\,\underbrace{\langle \xi(t')\rangle}_{0}\,dt'}_{0}$$

zufällige Anf. vert.
(unkorrel. mit $\xi(t)$)

<u>Autokorrel. fkt.</u> :

$$\langle x(t)x(t')\rangle - \langle x(t)\rangle\langle x(t')\rangle$$

$$= \left[\langle x(0)^2\rangle - \langle x(0)\rangle^2\right] e^{-k(t+t')} + 2D\int_0^t dt'' e^{-k(t-t'')} \int_0^{t'} dt''' e^{-k(t'-t''')} \underbrace{\langle \xi(t'')\xi(t''')\rangle}_{\delta(t''-t''')}$$

$$= \left[\langle x(0)^2\rangle - \langle x(0)\rangle^2\right] e^{-k(t+t')} + \frac{2D}{2k} e^{-k(t+t')} e^{2kt'''}\Big|_0^{t'}$$

$\Downarrow$ $\int dt''$ fällt weg für $t > t'$, sonst $\int dt'''$ weg

$$= \left[\left(\langle x(0)^2\rangle - \langle x(0)\rangle^2\right) - \frac{D}{k}\right] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|}$$

Stationär: $t, t' \to \infty$, $t-t'$ endlich

$$= \frac{D}{k} e^{-k|t-t'|} \qquad \text{wie aus FP-Gl.!}$$

Varianz: $t = t'$

$$\langle(\Delta x)^2\rangle = \left[\langle \Delta x(0)^2\rangle - \frac{D}{k}\right] e^{-k(t+t')} + \frac{D}{k} \xrightarrow[\text{stationär}]{t,t'\to\infty} \frac{D}{k}$$

3. Rauschinduzierte Oszillationen und Muster

Normalerweise ist Rauschen (noise) unerwünscht, schmiert die determinist. Dynamik aus u. macht sie irregulär (destruktiv).

Neues Phänomen: konstruktiver Einfluss v. Rauschen in nichtlinearen Systemen

- bestimmte Rauschintensität ist optimal

3.1 Stochastische Resonanz

Verstärkung eines schwachen period. Signals mit Hilfe von Rauschen.

Resonanz als Fkt. der Rauschintensität

Lit.: Gammaitoni, Hänggi, Jung, Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998)

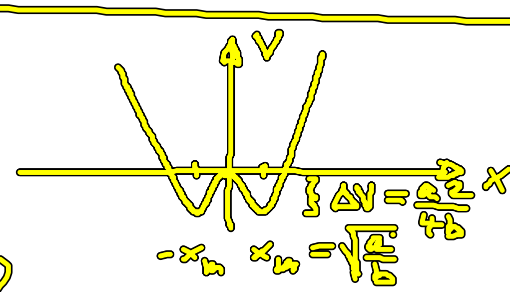
Benzi, Sutera, Vulpiani, J. Phys. A $\underline{14}$, L453 (1981) } period. Wiederkehr der Eiszeiten
Nicolis C, Nicolis G, Tellus $\underline{33}$, 225 (1981) }

(kleine period. Schwankungen der Erdachse u. der Exzentrizität der Umlaufbahn – reichen allein nicht aus zur Erklärung der Klimaschwankungen, $T = 20.000$ (100.000 J.))

Weitere Beispiele: el. Stromkreis (Schmitt-Trigger),
bistabiler Ringlaser
chem. Reaktionen
Neurophysiologie (Spiking: 2-Zustands-Sys.)
z.B. Flusskrebs (crayfish)
Quanten-Tunneln
raum-zeitl. System (anregbare Medien)

Überdämpftes Brown'sches Teilchen im bist. Potenzial

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$$



mit period. Kraft $A_0 \cos(\Omega t)$

u. weißem Rauschen $\xi(t)$

Langevin-Gl.:

$$\boxed{\dot{x} = -V'(x) + A_0 \cos(\Omega t) + \xi(t)}$$

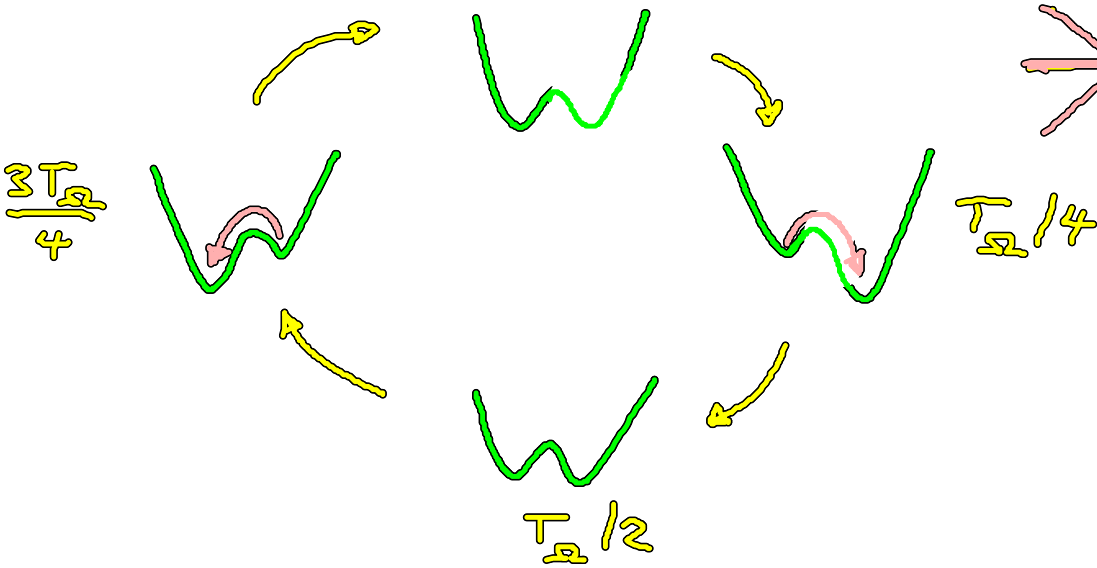
$$\langle \xi(t) \rangle = 0$$

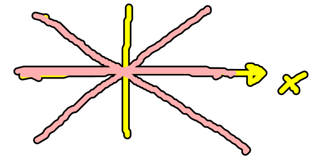
$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\,\delta(t-t')$$

Rauschinduz. Übergangsrate (Kramers-Rate) zwischen $-x_m$ und $+x_m$ (ohne period. Kraft):

$$r_K = \frac{1}{T_K(D)} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi} \exp\left(-\frac{\Delta V}{D}\right) \qquad (a = b = 1)$$

period. Modulation des Pot. $V(x) - A_0 x \cos(\Omega t)$:





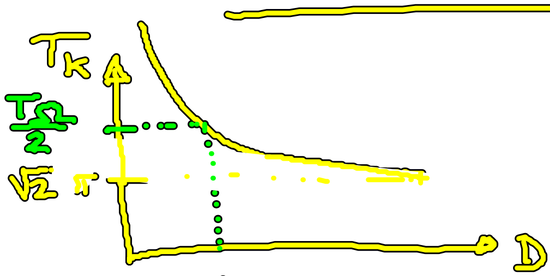
$$\boxed{T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}}$$

$\Rightarrow$ period. Osz. im bistab. Pot. $\langle x(t)\rangle = \bar{x}\cos(\Omega t - \bar{\phi})$

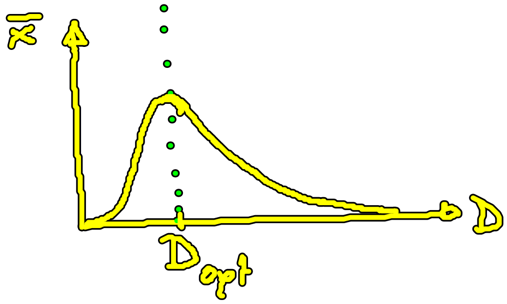
Verstärkung der Amplitude $\bar{x}$, wenn $T_\Omega \approx 2 T_K(D)$

$(\Omega \approx \pi r_K)$

$\Rightarrow$ stochast. Resonanz



für kleine Amplituden:



$$\bar{x}(D) = \frac{A_0 \langle x^2\rangle_0}{D} \frac{2 r_K(D)}{\sqrt{4 r_K^2(D) + \Omega^2}}$$

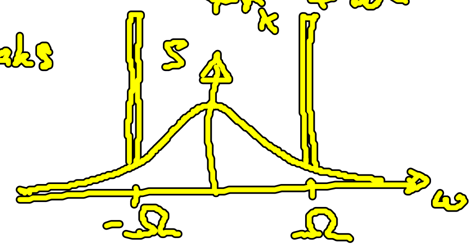
Spektrale Leistungsdichte

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau} \langle x(t+\tau)\, x(t)\rangle$$

zusätzlich über Anfangsphase gemittelt

Untergrundrauschen $S_N(\omega) \approx \frac{4 r_K \langle x^2 \rangle_0}{4 r_K^2 + \omega^2}$

überlagert durch δ-Peaks bei $\omega = \pm \Omega$

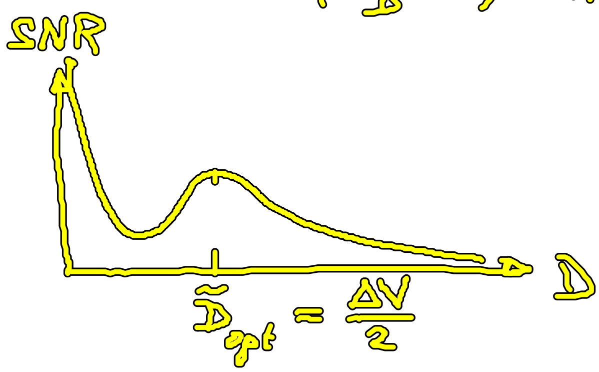


$$S(\omega) = \frac{\pi}{2} \bar{x}(D)^2 \left[\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega) \right] + S_N(\omega)$$

Signal-to-noise ratio (Maß für Signalverstärkung):

$$\mathrm{SNR} = \frac{2 \lim_{\Delta\omega \to 0} \int_{\Omega - \Delta\omega}^{\Omega + \Delta\omega} S(\omega)\, d\omega}{S_N(\omega)}$$

$$\approx \pi \left(\frac{A_0 x_m}{D} \right)^2 r_K(D) \sim \frac{e^{-\frac{\Delta V}{D}}}{D^2}$$



$\tilde{D}_{opt} \neq D_{opt}$