

3.2 Kohärenzresonanz

Jetzt: autonome Systeme, ohne externe periodische treibende Kraft

Annahme: determinist. System hat stabilen Fixpt.,

⇒ Rauschen kann Oszillationen induzieren
(self-sustained oscillations, stoch. limit cycle)
(LC)

Reviews: Lindner, Garcia-Ojalvo, Neiman, Schimansky-Geier:
Effects of noise in excitable systems, Phys. Rep. 392, 321 (2004)

Janson, Balonov, Schöll: Control of noise-induced dyn.
in: Handbook of Chaos Control (Wiley, 2008)

häufig unterhalb einer Bif. eines determ. Grenzzyklus
(Hopf-Bifurk., globale Bifurkation (SNIPER = SNIC))

1. Beispiel: Van der Pol - Oszillator (1920: wichtig. el. Stromkreis)

- System knapp unterhalb einer Hopf-Bifurkation

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\varepsilon - x^2)y - \omega_0^2 x + D\xi(t) \end{cases}$$

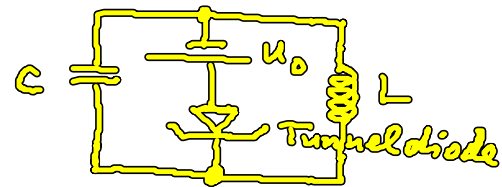
$$\Leftrightarrow \ddot{x} - (\varepsilon - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = D\xi(t)$$

nichtlin. Reibung

D=0 (determ.): Fixp. $x^* = y^* = 0$

Stab. der Fixp. (linearisiert) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$$\lambda^2 - \lambda + \varepsilon + \det A = 0, \quad \text{tr} A = \varepsilon, \quad \det A = \omega_0^2 > 0$$

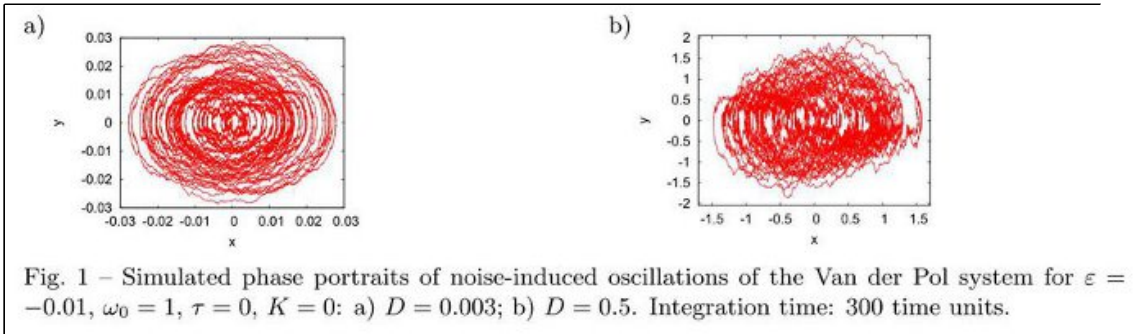


NB: Rauschintens. D statt $\sqrt{2D}$



$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \epsilon = 0 \text{ Hopf-Bif. } (\lambda = \pm i\omega_0) \\ \epsilon < 0 \text{ stabiler Fokus} \\ \epsilon > 0 \text{ instab. Fokus + LC} \end{array} \right\} \lambda = \frac{\epsilon}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$$

Wähle z.B. $\epsilon = -0.01$, $\omega_0 = 1$
 \Rightarrow rauschinduz. Osz. ($D \neq 0$)



Pomplun, et al.
 Europhys. Lett. 71, 366 (2005)

2. Beispiel: FitzHugh-Nagumo-Modell (Bonhoeffer-van-der Pol)

- anregbares System (Typ II): Schwellenverhalten (stabiler Fixp.)

Anwendung: Spiking von Neuronen

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} = x + a + D\xi(t) \end{cases}$$

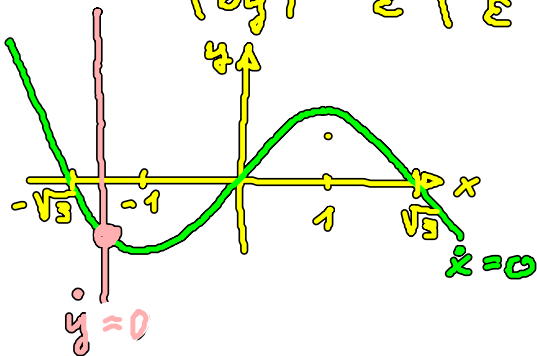
Aktuator (schnell)

Inhibitor (langsam)

Zeitskalenverh. $\epsilon \ll 1$

$D = 0$: Fixp. $x = -a$, $y = -a + \frac{a^3}{3}$ Anreg.schwelle a

Stab. $\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \frac{1}{\epsilon} \begin{pmatrix} 1-a^2 & -1 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$, $\text{tr} A = 1-a^2$, $\det A = \epsilon > 0$



$a = 1$: Hopf-Bif.

$a < 1$: instab. Fixp. + LC (oszillator.)
 Regime

$a > 1$: stabiler Knoten (anregbares Regime)

(z.B. $a = 1.1$, $\epsilon = 0.01$)

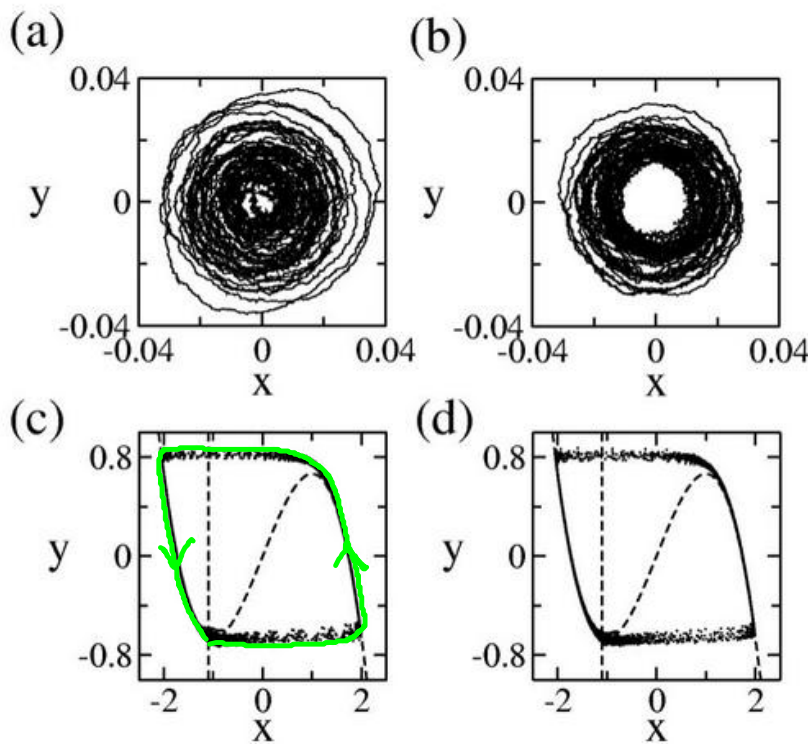
slow-fast-System

$D \neq 0$: rauschinduz. Osz.

Janson, Balazs, Schöll: PRL 93, 010601 (2004)

Balazs, Janson, Schöll: Physica D 199, 1 (2004)

Schöll, Balazs, Janson: Stoch. Dyn. 5, 231 (2005)



Janson (2007)

Van-der-Pol

FitzHugh-Nagumo

FIG. 1. Phase portraits of noise-induced motion: (a),(b) Van der Pol oscillator at $D = 0.003$; (c),(d) FitzHugh-Nagumo system at $D = 0.09$ (the dashed lines denote the null isoclines), (a),(c) $K = 0$; (b),(d) $K = 0.2$, $\tau = T_0$.

Kohärenzresonanz

Gang, Ditinger, Ning, Haken: Stoch. resonance without exten. periodic forcing, PRL 71, 807 (1993)

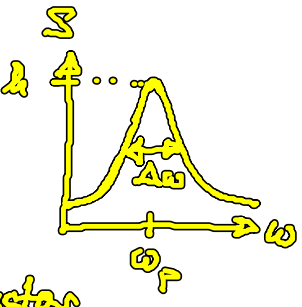
Pikovsky, Kurths: Coherence resonance in a noise-driven excitable system, PRL 78, 775 (1997)


Neiman, Sogami, Stone: PRE 56, 270 (1997)

- konstruktiver Einfluss von Rauschen

- Regularität („Kohärenz“) der rauschinduz. Osz. am größten für endl. Rauschintens. D_{opt}
- Maß für Regularität:

- Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) $\beta = \frac{h}{\Delta\omega/\omega_p}$
 (Haken) quality factor



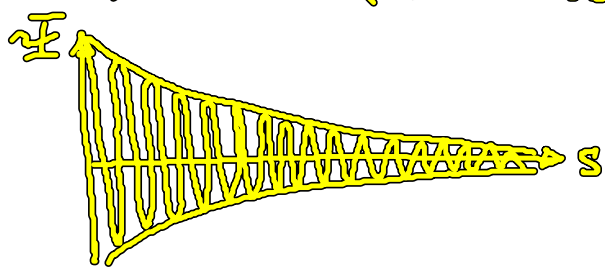
- Standardabweich. des ISI T_{ISI}
 (interspike interval) 
 $R_T = \frac{\sqrt{\langle T_{ISI}^2 \rangle - \langle T_{ISI} \rangle^2}}{\langle T_{ISI} \rangle}$ (normierte ISI-Flukt.)

- Korrelationszeit $t_{cor} := \frac{1}{\Psi(0)} \int_0^\infty |\Psi(s)| ds$
 (Autokor. fkt. $\Psi(s) = \langle [x(t+s) - \langle x \rangle][x(t) - \langle x \rangle] \rangle$)
 Varianz $\Psi(0) = \sigma^2$

Motivation der Def.:

für lin. stoch. Prozess $\dot{x} = -(k + i\omega_0)x + \xi(t)$:

$\Psi(s) = \Psi(0) e^{-ks} \cos \omega_0 s$ ($\S 2.3$: stat. Ornstein-Ull.)
 $\text{Re } e^{-(k+i\omega_0)s}$



exp. abklingende Enveloppe
 Trägerfrequenz ω_0
 $k > 0$ (stabiler Fixp.)

Zusammenhang zwischen t_{cor} und k :

$t_{cor} = \int_0^\infty e^{-ks} |\cos \omega_0 s| ds$

Approx. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi d\phi = \frac{2}{\pi}$ für $k \ll \omega_0$ (Füllfaktor)

$\Rightarrow t_{cor} \approx \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-ks} ds = \frac{2}{\pi k}$

also $\Psi(s) = \Psi(0) e^{-\frac{2}{\pi} \frac{s}{t_{cor}}} \cos \omega_0 s$

$k = |\operatorname{Re}(\text{Eigenwert des Fixp.})| = \text{Bifurk. par.}$
 $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (Abstand von Hopf-Bif.)

⇒ je stabiler der Fixp., umso kürzer die Corr.zeit
 (je weiter weg von der Hopf-Bif.)

Kohärenzresonanz

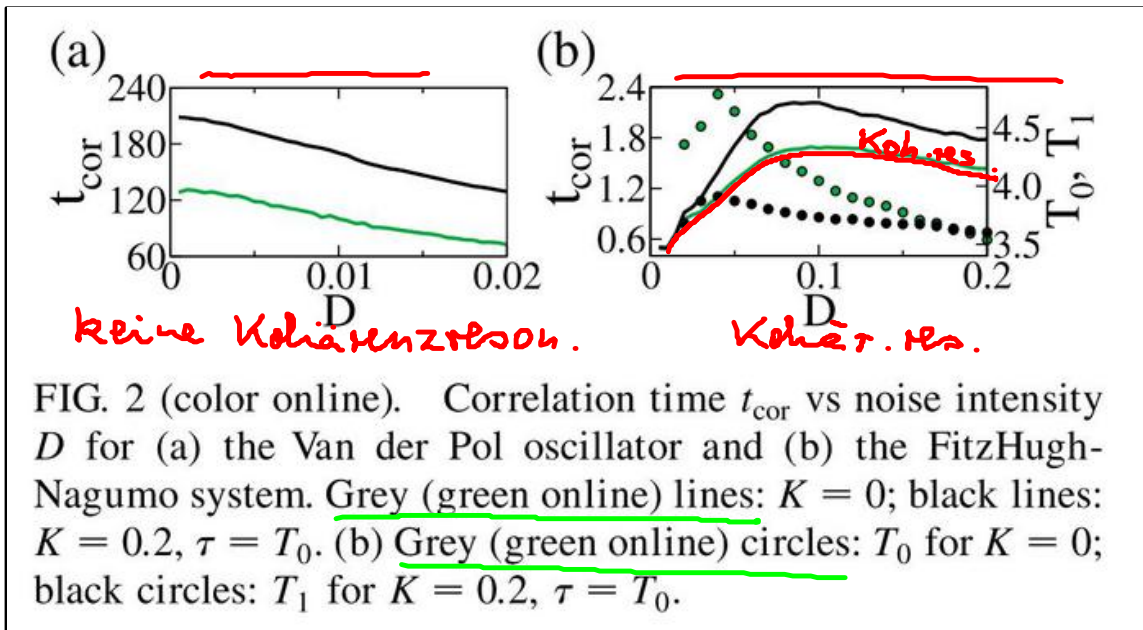
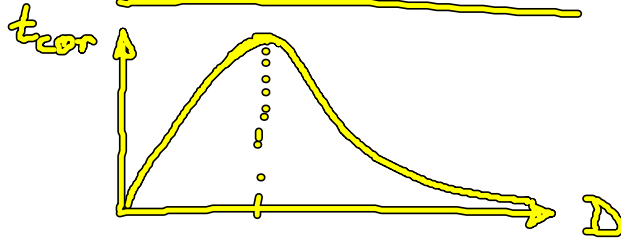
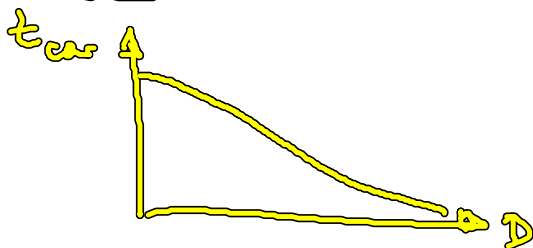


FIG. 2 (color online). Correlation time t_{cor} vs noise intensity D for (a) the Van der Pol oscillator and (b) the FitzHugh-Nagumo system. Grey (green online) lines: $K = 0$; black lines: $K = 0.2$, $\tau = T_0$. (b) Grey (green online) circles: T_0 for $K = 0$; black circles: T_1 for $K = 0.2$, $\tau = T_0$.

Zusammenspiel zweier Zeitskalen (FHN-Modell):

- Aktivierungszeit (Fixp. → Schwelle): Irregularität nimmt ab mit D
- Spike-Dauer + Erholungszeit (deton.): Irregularität nimmt zu mit D

NB: Van der Pol-Osz. zeigt keine Kohärenzresonanz



t_{cor} monoton abnehmend
 (kein Schwellenverhalten,
 nur lokale Eigenschaft
 des Fixp.)