4. Quantenstatistik im Nichtgleichgewicht

Ziel: Einführung des Photon-Konzeptes durch voll QM Beschreibung des Lichtes (im Gegensatz zur klass. Beschreibung durch Maxwell-gleichungen)

- E-Feld mit definierter Amplitude, Phase wird zum hermiteschen Operator

Wozu? - Beschreibung von Vakuum Fluktuationen
  → Effekte wie spontane Emission

- Beschreibung korrelierter Photonen (Verschränkung)
- " nicht-klassischer Photonenstatistik (anti-Bunching bei Einzelphotonemittern
- gequetschte Zustände
- Lasing ohne Inversion

4.1. Quantisierung des Strahlungsfeldes

Quantisieren: - Aufstellen von Vertauschungsrelationen von herm. Operatoren im Hilbertraum

- phys. Observable → herm. Operatoren

4.1.1. Erinnerung an Quantisierung von El. Vielteilchensysteme

- 1. Quantisierung $\left(\begin{array}{l} x \to \vec{x} \\ p \to \frac{\hbar}{i}\nabla \end{array} \right)$ führt auf Schrödingergleichung

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\,\underline{1\!\!1}$$

$i,k = 1,2,3$ kart. Koord.

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_k] = [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0$$

Unschärfe $(\Delta\hat{O})^2 = \langle (\hat{O} - \langle\hat{O}\rangle\underline{1\!\!1})^2 \rangle$

$$\Delta\hat{A}\,\Delta\hat{O} \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{O}]\rangle\right|$$

$$\Delta\hat{x}\,\Delta\hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$ QM Unschärfe

Mittelwerte von Observablen $\langle\hat{F}\rangle = \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle$ reinen Zustand

$= \mathrm{tr}\,\hat{\varrho}\hat{F}$ gemischter Zustand

wobei $\hat{\varrho} = \sum_\psi p_\psi |\psi\rangle\langle\psi|$

- 2 Quantisierung des Schrödingerschen Wellenfeld in der Vielteilchentheorie

Problem: durch aufwendige Symmetrisierung ist Beschreibung schwierig

Besser: Vereinfachung durch Formulierung von Erzeuger + Vernichter Operatoren im Fock Raum $\Rightarrow$ Summe aller N Teilchen Hilberträume

$\oplus$ Quantisierungsvorschrift aus Symmetrieeigenschaften

$\to$ Bosonen $[\hat{a}_k^+\ \hat{a}_\ell^+] = 0$

$$[a_k\ a_\ell^+] = \delta_{k\ell}$$

$\longrightarrow$ Feldoperatoren $\hat{\psi}^+(r) := \sum_\lambda \psi^*_\lambda(r)\ \hat{a}_\lambda^+$

Lösung der Schrödingergl. eines Teilchens im Zustand λ

Bemerkung: schlecht anzuwenden für EM-Feld, da Symm. a priori nicht bekannt

$\longrightarrow$ Formalismus über Lagrangefunktion ist besser

4.1.2. Feldquantisierung über Lagrangeformalismus

- Idee: Analog zur Punktmechanik aus Poissonklammer Vertauschungsrelationen folgern

$$L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \longrightarrow p_\alpha = \partial_{\dot{q}_\alpha} L$$

Lagrangefkt. für Koordinaten q_α — Impuls

$$\{q_\alpha, p_{\alpha'}\} = \delta_{\alpha\alpha'} \xrightarrow{\text{Quantisierung}} [\hat{q}, \hat{p}] \neq 0$$

- Wirkungsprinzip für Punktmechanik

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0 \quad \text{mit} \quad 0 = \delta q_\alpha(t_1) = \delta q_\alpha(t_2)$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

• Wirkungsprinzip für Felder $\psi(\underline{r},t)$ (kontinuierlicher Grenzfall eines System mit unendlich vielen Freiheitsgraden)

Teilchen $S_T = S(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

Feld $S_F = S(\psi(\underline{r},t), \partial_t\psi(r,t), \partial_k\psi(\underline{r},t), t)$ $\qquad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$

$$= \underbrace{\int dt \int d^3r}\; \mathcal{L}(\psi, \dot\psi, \partial_k\psi, t)$$

Ort und Zeit werden gleichbehandelt

Lagrangedichte hängt auch von räumlichen Ableitungen von ψ ab

Lagrangefunktional: $L = \int d^3r\, \mathcal{L}(\psi,\dot\psi,\partial_k\psi,t)$
$= L(\psi, \dot\psi, t)$

Hamilton Prinzip $\delta S_F = 0$ mit $\delta\psi(r,t_1) = \delta\psi(r,t_2) = 0$

$$0 = \delta S_F = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r\; \delta\mathcal{L}(\psi,\dot\psi,\partial_k\psi)$$

$$= \int dt \int d^3r \left[\underline{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}}\,\delta\psi + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\,\delta\dot\psi} + \sum_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k\psi}\,\delta\partial_k\psi \right]$$

$$= \int dt \int d^3r \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k\psi} \right)\delta\psi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\delta\psi\right) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_k\psi}\,\delta\psi\right)$$

kein Beitrag wegen Variationsbed.

Vektordivergenz liefert wegen Satz von Gauß keinen Beitrag

Bed.: $\delta\psi(r)$ müssen unabhängig sein

$$\rightarrow \quad \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k \psi}} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi} = 0 \qquad (2)$$

$$= \frac{\delta L}{\delta \psi} \;\hat{=}\; \text{Funktionalableitung von } L$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ L\left(\psi(r') + \varepsilon\,\delta(r - r'), \dot\psi(r')\right) - L\left(\psi(r'), \dot\psi(r')\right) \right\}$$

$\rightarrow$ Lagrangegleichung für Felder ist formal identisch mit Punktmechanik

- Verallgemeinerter Impuls zu $\psi(r)$: $\pi(r) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\psi}$
- Hamiltondichte $\mathcal{H} = \pi(r)\,\dot\psi(r) - \mathcal{L}$
- Hamiltonfunktional $H = \int d^3r\, \mathcal{H} = \int d^3r\, \pi(r)\,\dot\psi(r) - L$
- Poissonklammer $\dot F = \int d^3r \left(\dfrac{\delta F}{\delta \psi}\dot\psi + \dfrac{\delta F}{\delta \pi}\dot\pi \right) =: \{F, H\}$

mit $\dfrac{\delta H}{\delta \psi} = -\dot\pi$

$\dfrac{\delta H}{\delta \pi} = \dot\psi$

$$\rightarrow \{\psi(\underline{r}), \pi(\underline{r}')\} = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

Übergang zur Quantentheorie: $\psi \rightarrow \hat\psi$

$\pi \rightarrow \hat\pi$

- Vertauschungsrel. aus Poissonklammer $\quad [\hat{\psi}(r), \hat{\pi}(r')] = i\hbar\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

- Zeitentwicklung $\quad \dot{\hat{F}} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{F}, \hat{H}]$

4.1.3. Lagrangedichte für freies elektro-magn. Feld

Frage: Wo bekommt man $\mathcal{L}$ her?

Antwort: wird so gewählt, das Lagrange Feldgleichungen die klass. Feldgl. reproduzieren

Tipp: klassische Feldenergie anschauen

$$E_{EM} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d^3r\, \bar{E}(r,t)\bar{E}(r,t) + \frac{1}{2\mu}\int d^3r\, \bar{B}\bar{B}$$

- klass. Feldgleichungen

E-Dyn: mit Coulomb Eichung $\quad \nabla \cdot A = 0$

$$(\mathrm{I}) \quad \Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} = 0 \qquad \underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \underbrace{\nabla\phi}_{=0}$$

$$(\mathrm{II}) \quad \Delta\varphi = 0 \xrightarrow{\text{o.B.d.A}} \varphi = 0 \qquad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

→ Vektorfeld $\underline{A}$ ist das zu quantisierende Feld ψ

- Ansatz: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}\,\underline{E} - \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\,\underline{B}\right)$

$k = 1,2,3$

Einsetzen in ② $\quad$ wobei $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \varepsilon_0 \dot{A}_k$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_k A_i} = \frac{1}{\mu_0} \partial_{x_k} A_i$$

es ist:

$$(\nabla \times \underline{A})^2 = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kln} \partial_{x_i} A_j \partial_{x_l} A_n$$

=> liefert Wellengleichung $\underline{A}$ $\qquad \Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{A} = 0$

kanonisch konjugiertes Feld: $\boxed{\Pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \varepsilon_0 \dot{A}_k = - \varepsilon_0 E_k}$

- Hamiltondichte – Hamiltonfunktional

$$H = \int d^3r \left(\Pi_k \dot{A}_k - \frac{\varepsilon_0}{2} \dot{A}_k^2 + \frac{1}{2\mu} (\nabla \times A)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^3r \left(\varepsilon_0 E_k^2 + \frac{1}{\mu_0} B_k^2 \right) \qquad \hat{=} \text{ Feldenergie}$$

- Quantisierung : $\quad [A_k(r), \Pi_{k'}(r')] = i\hbar \, \delta_{kk'} \delta(\underline{r} - \underline{r}')$

$$[A_k(r), A_{k'}(r')] = 0$$

4.1.4. Modenentwicklung für freien Raum

Lösung der Wellengleichung $\quad \Box A(r,t) = 0 \quad$ durch

Separationsansatz

$$\hat{A}_k(\underline{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(\underline{r})\, \hat{q}_\lambda(t) \qquad (\mathrm{II})$$

↳ Lösungen der Helmholz gleichung

$$\Delta A_{\lambda k} + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} A_{\lambda k} = 0$$

↑ z.B. ebene Wellen

für $\hat{q}_\lambda$ bleibt Bewegungsgleichung

$$\boxed{\ddot{\hat{q}}_\lambda + \omega_\lambda^2 \hat{q}_\lambda^2 = 0} \quad \hat{=} \text{ Oszillatorgleichung}$$

kan. konj. Feld $\quad \varepsilon_0 \dot{\hat{A}}_k(r,t) = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(r)\, \dot{\hat{q}}_\lambda(t)$

$$\boxed{\hat{\Pi}_k(r,t) = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(r)\, \hat{p}_\lambda(t)} \qquad \dot{q} = p$$