Wdh.: Auf dem Weg zur Quantisierung des Strahlungsfeldes hatten wir

Lagrangedichte $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2\right)$ definiert

die über Lagrange 2. Art für Felder auf

Wellengleichung $\Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2}\ddot{\underline{A}} = 0$ (Coulomb Eichung) führt.

$\hat{A}, \hat{\Pi}$ sind Feldoperatoren nach Moden entwickelt

$$\hat{A}_k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(r)\, \hat{q}_\lambda(t) \qquad (\underline{II})$$

$$\hat{\Pi}_k = \sqrt{\varepsilon_0} \sum_\lambda c_\lambda A_{\lambda k}(r)\, \hat{p}_\lambda(t) = -\varepsilon_0 \hat{E}_k \qquad (\underline{III})$$

das Hamiltonfunktional ist $H = \frac{1}{2}\int d^3r \left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\underline{A})^2\right) (\underline{I})$

und es gilt $[\hat{A}_k(r), \hat{\Pi}_{k'}(r')] = i\hbar\, \delta_{kk'}\, \delta(\underline{r}-\underline{r}')$

da $A_{\lambda k}$ ein ONS bilden

gilt: $\delta_{\lambda\lambda'} = c_\lambda c_{\lambda'} \int d^3r\, A_{\lambda k}(r)\, A_{\lambda' k}(r)$

Man erhält $\hat{q}_\lambda, \hat{p}_\lambda$ wie folgt

$$\hat{q}_\lambda = \sqrt{\varepsilon_0}\, c_\lambda \int d^3r\, A_{\lambda k}(r)\, \hat{A}_k(r,t)$$

$$\hat{p}_\lambda = \frac{c_\lambda}{\sqrt{\varepsilon_0}} \int d^3r\, A_{\lambda k}(r)\, \Pi_k(r,t)$$

weiter

Einsetzen von (II) und (III) in (I)

$$\Rightarrow \boxed{\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \left(\hat{p}_\lambda^2 + \omega_\lambda \hat{q}_\lambda^2 \right)} \qquad (\mathrm{IV})$$

-> $\hat{H}$ enthält nur noch zeitabhängige Operatoren

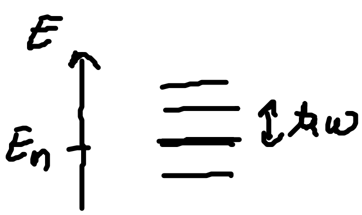
-> Strahlungsfeld entspricht einem System aus unendlich vielen harm. Oszillatoren

Vertauschungsrelation von $\hat{p}, \hat{q}$

$$\underline{\underline{[\hat{q}_\lambda, \hat{p}_\lambda]}} = c_\lambda c_{\lambda'} \int d^3r \int d^3r' \, A_{\lambda k}(r) A_{\lambda' k'}(r') \left[\hat{A}_k(r), \Pi_{k'}(r') \right]$$

$$= c_\lambda c_{\lambda'} \, i\hbar \int d^3r \, A_{\lambda k} A_{\lambda' k}(r) = \underline{\underline{i\hbar \, \delta_{\lambda\lambda'}}}$$

4.1.5 Formulierung durch Erzeuger + Vernichter Operatoren



wir wissen:

- harm. Oszillator hat äquidistantes Spektrum

$$\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$$

- Abstand der Energieniveaus ist $\hbar\omega$

Einführung neuer Operatoren a_λ, a_λ^+ : Vernichten oder Erzeugen ein Photon der Mode λ

$$\hat{H} a^+|n\rangle = (E_n + \hbar\omega)|n+1\rangle$$

wir definieren $\hat{a}_\lambda = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}}\,\hat{q}_\lambda + i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}}\,\hat{p}_\lambda$

$a_\lambda^+ = \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}}\,\hat{q}_\lambda - i\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}}\,\hat{p}_\lambda$

$\hat{q}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}}\,(\hat{a}_\lambda + \hat{a}_\lambda^+)$

$\hat{p}_\lambda = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}}\,(a_\lambda - a_\lambda^+)$

$$\rightarrow \boxed{\hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda\left(\hat{n}_\lambda + \frac{1}{2}\right)}$$

Photonenzahloperator
$\hat{n}_\lambda = \hat{a}_\lambda^+ \hat{a}_\lambda$

Vertauschungsrelation von $\hat{a}^+, a$:

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$
$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_\lambda^+, a_{\lambda'}^+] = 0$$

→ Photonen haben Charakter von Bosonen

- Zeitentwicklung von $\hat{a}$

$$\dot{\hat{a}} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{a}]$$ → Übung

$$\dot{\hat{a}} = i\omega\hat{a}$$

$$\rightarrow \hat{a}(t) = \hat{a}(0)\, e^{i\omega t}$$

Zurück zu den Felder ergibt sich mit geeigneter Normierung

$$\boxed{\begin{aligned}
\hat{A}_k &= \sum_\lambda \tilde{\hat{A}}_{\lambda k}(r)\,(\underbrace{\hat{a}_\lambda} + \underbrace{a_\lambda^+}) \\
\hat{E}_k &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{\Pi}_k = \sum_\lambda i\omega_\lambda \tilde{\vec{A}}_{\lambda k}(r)\,(\vec{a}_\lambda - a_\lambda^+) \\
\hat{B}_k &= \varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}A_j = \sum_\lambda \varepsilon_{kij}\frac{\partial}{\partial x_i}A_{\lambda j}(r)\,\vec{a}_\lambda + c.c.
\end{aligned}}$$

nur eine Mode in x-Richtung

$$\hat{A} = \tilde{\hat{A}}(r)\,\hat{a}_\lambda + \tilde{\hat{A}}^*(r)\,a_\lambda^+$$

positiver Frequenzanteil

negativen Frequenzanteil

4.2. Quantenzustände des Lichtes

o.B.dA betrachte einmodiges Feld

Hamiltonian $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)$

4.2.1. Fock Zustände

Fock Zustände $|n\rangle$: sind Eigenzustände von $\hat{n}$

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$

Erzeugung von $|n\rangle$: n-maliges Anwenden von $\hat{a}^+$ auf Vakuumzustand

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{a}^+)^n|0\rangle$$

↳ aus Normierung $\langle n|n\rangle = 1$

Wirkung von $\hat{a}, \hat{a}^+$:

$$\rightarrow \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle$$
$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\;|n-1\rangle$$

Jeder reine Zustand $|\psi\rangle$ läßt sich nach $|n\rangle$ entwickeln

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle}$$

$|\langle n|\psi\rangle|^2$: Wahrscheinlichkeit n Photonen zu registrieren

• Photonenzahlstatistik im reinen Fock Zustand:

$$\langle\hat{n}\rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|a^+\underline{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,\langle n|a^+|n-1\rangle$$
$$= n\,\langle n|n\rangle = \underline{\underline{n}}$$

$$\langle(\Delta\hat{n})^2\rangle = \langle(\hat{n}-n)^2\rangle$$
$$= \langle\hat{n}^2\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = \langle a^+aa^+a\rangle - n^2 = 0$$

Photonenzahl unterliegt keiner Schwankung

→ Extremfall einer sub-Poisson Statistik (keine Breite)

• Feldstärkestatistik im Fock Zustand

$$\hat{E} = c\hat{a} + c^*\hat{a}^+$$

Mittelwert $\langle n|\hat{E}|n\rangle = c\,\underbrace{\langle n|\hat{a}|n\rangle}_{=0} + c^*\langle n|\hat{a}^+|n\rangle = 0$

Varianz $\langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle = c^2 \underbrace{\langle \hat{a}^2 \rangle}_{=0} + c^{*2} \langle a^{+2} \rangle + |c|^2 \underbrace{\langle (\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}) \rangle}_{\sqrt{n}\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} - \langle \hat{E} \rangle^2$

$$= |c|^2 (2n+1)$$

$$= |c|^2 (2\langle \hat{n} \rangle + 1)$$

Bemerkung: • Schwankung nimmt mit wachsender Photonanzahl zu

• Im Vakuumzustand verschwindet die Schwankung nicht

-> Vakuum ist lebhafter Zustand

• Quadraturkomponenten

- definiere normierte Orts + Impulsoperatoren $\hat{x}_1, \hat{x}_2$

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^+(0)$$

$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^+(0))$$

Kommutator

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i[\hat{a}^+, \hat{a}]$$

• Unschärferelation

$$\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{x}_2 \geq 1$$

wobei $\langle n|\hat{x}_1|n\rangle = 0$

$\langle n|\hat{x}_2|n\rangle = 0$

im Vakuumzustand $|0\rangle$ gilt $\Delta \hat{x}_1 = \Delta \hat{x}_2 = 1$

Vakuumzustand minimiert die Unschärfe

Darstellung der Feldstärke durch $\hat{x}_1$ und $\hat{x}_2$:

benutze:

$x_2 - ix_1 = -2ia^+(0)$

$x_2 + ix_1 = 2i\hat{a}(0)$

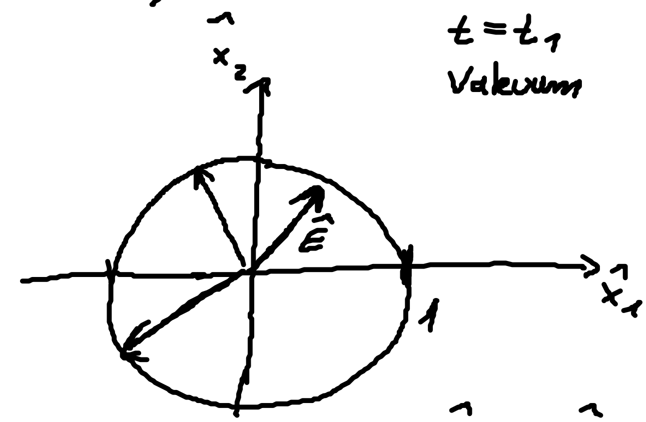
$$\hat{E} = c(\hat{a}(0)e^{-i\omega t} + a^+(0)e^{i\omega t})$$

$$= c\left(\frac{1}{2i} e^{-i\omega t}(x_2 + i x_1) - \frac{1}{2i}(x_2 - i x_1) e^{i\omega t}\right)$$

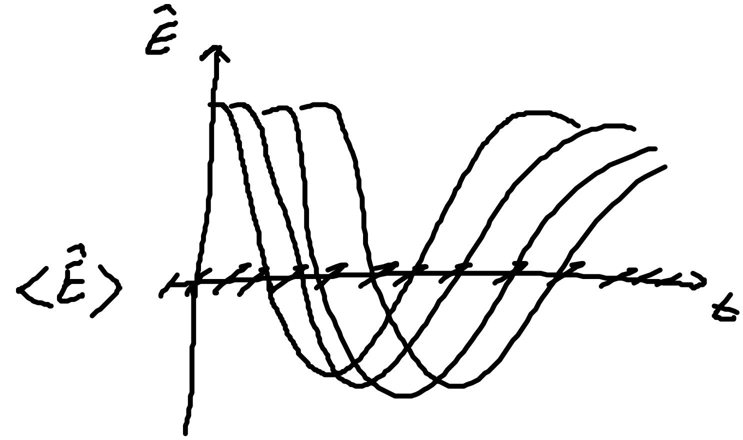
$$= c\left(x_2\left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2i}\right) + i x_1\left(\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2i}\right)\right)$$

$$= -c(\hat{x}_2 \sin\omega t + \hat{x}_1 \cos\omega t)$$

Vor.i
$t = t_1$
Vakuum



$\Delta\hat{x}_1 = \Delta\hat{x}_2 = 1$



Amplitude des $\hat{E}$ Feldes ist fest aber Phase ist unbestimmt

Resultat: Fock Zustand ist maximal nicht klassisch

Frage: Kann man Zustände aus Fock-Zuständen „bauen" die annähernd klassische Eigenschaften haben

4.2.2. Glauber Zustände – kohärente Zustände

Glauber 1963, Phys.Rev.131

Idee: minimale Unschärfe hätte verschobener Vakuumzustand

<u>Ansatz:</u> suche Eigenzustände $\hat{a}$ (Glauber Zustand)

EW-Gleichung: $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Entwicklung nach Fock Zuständen $|\alpha\rangle \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, c_n |n-1\rangle \overset{!}{=} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

Index verschieben

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} |n-1\rangle$$

$$\rightarrow c_n \sqrt{n} = \alpha\, c_{n-1}$$

Rekursives Einsetzen:

$$c_n = \frac{\alpha}{\underline{\sqrt{n}}} c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

$$c_{n-1} = \frac{\alpha}{\underline{\sqrt{n-1}}} c_{n-2}$$

$$c_{n-2} = \frac{\alpha}{\underline{\sqrt{n-2}}} c_{n-3}$$

$$\rightarrow |\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Poisson Verteilung der Photonen auf Fock Zustände

$\uparrow$ aus Normierung $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 = |c_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{\alpha^n \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\langle n|n'\rangle}_{\delta_{nn'}}$

$$= |c_0|^2 e^{|\alpha|^2}$$

$$\rightarrow c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

Bem.: Zustände sind nicht orthogonal (nur näherungsweise)

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$$

Applet: web.ift.uib.no/AMOS/MOV/HO/

Statistische Eigenschaften im Zustand $|\alpha\rangle$

$$\alpha = |\alpha| e^{i\Theta}$$

- Feldstärkestatistik

Mittelwert $\langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle = \underbrace{C\alpha + C\alpha^*}_{c|\alpha|e^{i\Theta} + C|\alpha|e^{-i\Theta}} = 2C|\alpha|\cos\Theta$

Varianz $\langle(\Delta\hat{E})^2\rangle = \langle\alpha|\hat{E}^2|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{E}|\alpha\rangle^2$

$$= \langle\alpha|C^2(aa + a^+a^+ + \underbrace{aa^+}_{1+a^+a} + a^+a)|\alpha\rangle - 4C^2\alpha^2\cos^2\Theta$$

$$= c^2\left(|\alpha|^2 e^{2i\theta} + |\alpha|^2 e^{-2i\theta} + 1 + 2|\alpha|^2\right) - 4c^2\alpha^2\cos^2\theta$$

$$= c^2|\alpha|^2 \underbrace{\left(2\cos 2\theta + 2 - 4\cos^2\theta\right)}_{0} + c^2$$

$$= \underline{\underline{c^2}}$$

$\rightarrow$ Die Varianz der Feldstärke im

glauber Zustand $|\alpha\rangle$ entspricht der Varianz im Vakuum

Unschärfe unabhängig von α