

Wdh.: Auf dem Weg zur Quantisierung des Strahlungsfeldes hatten wir

$$\text{Lagrangendichte } \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\epsilon_0 \dot{\underline{A}}^2 - \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2) \text{ d^3r}$$

die über Lagrange 2. Art für Felder auf

$$\text{Wellengleichung } \Delta \underline{A} - \frac{1}{c^2} \ddot{\underline{A}} = 0 \quad (\text{Coulombs Ersetzung}) \text{ führt.}$$

$\hat{A}, \hat{\Pi}$ sind Feldoperatoren nach Moden entwickelt

$$\hat{A}_k = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{\lambda k}(r) \hat{q}_{\lambda}(t) \quad \text{II)}$$

$$\hat{\Pi}_k = \sqrt{\epsilon_0} \sum_{\lambda} c_{\lambda} A_{\lambda k}(r) \hat{p}_{\lambda}(t) = -\epsilon_0 \hat{E}_k \quad \text{III)}$$

das Hamiltonfunktional ist $H = \frac{1}{2} \int d^3r (\epsilon_0 \underline{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \underline{A})^2)$ (I)

und es gilt $[\hat{A}_k(r), \hat{\Pi}_{k'}(r')] = i \hbar \delta_{kk'} \delta(\underline{r} - \underline{r}')$

da $A_{\lambda k}$ ein ONS bilden

gilt: $\delta_{\lambda\lambda'} = c_{\lambda} c_{\lambda'} \int d^3r A_{\lambda k}(r) A_{\lambda' k}(r)$

man erhält $\hat{q}_{\lambda}, \hat{p}_{\lambda}$ wie folgt

$$\hat{q}_{\lambda} = \sqrt{\epsilon_0} c_{\lambda} \int d^3r A_{\lambda k}(r) \hat{A}_k(r, t)$$

$$\hat{p}_{\lambda} = \frac{c_{\lambda}}{\sqrt{\epsilon_0}} \int d^3r A_{\lambda k}(r) \hat{\Pi}_k(r, t)$$

Weiter

Einsetzen von (II) und (III) in (I)

$$\Rightarrow \hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (\hat{p}_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 \hat{q}_{\lambda}^2) \quad (IV)$$

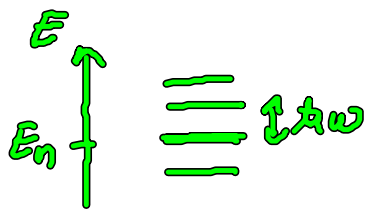
→ \hat{H} enthält nur noch zeitabhängige Operatoren

→ Strahlungsfeld entspricht einem System aus unendlich vielen harm. Oszillatoren

Vertauschungsrelation von \hat{p}, \hat{q}

$$\begin{aligned} \underline{\underline{[\hat{q}_{\lambda}, \hat{p}_{\lambda'}]}} &= c_{\lambda} c_{\lambda'} \int d^3r \int d^3r' A_{\lambda b}(r) A_{\lambda' b}(r') [\hat{A}_b(r), \hat{\Pi}_b(r')] \\ &= c_{\lambda} c_{\lambda'} i \hbar \int d^3r A_{\lambda b} A_{\lambda' b}(r) = \underline{\underline{i \hbar \delta_{\lambda \lambda'}}} \end{aligned}$$

4.1.5 Formulierung durch Erzeuger + Vernichter Operatoren



Wir wissen:

• harm. Oszillator hat äquivalentes Spektrum

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

• Abstand der Energieniveaus ist $\hbar\omega$

Einführung neuer Operatoren $a_{\lambda}, a_{\lambda}^{\dagger}$: Vernichten oder Erzeugen ein Photon der Mode λ

$$\hat{H} a^{\dagger} |n\rangle = (E_n + \hbar\omega) |n+1\rangle$$

wir definieren

$$\left. \begin{aligned} \hat{a}_\lambda &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}} \hat{q}_\lambda + i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}} \hat{p}_\lambda \\ \hat{a}_\lambda^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega_\lambda}{2\hbar}} \hat{q}_\lambda - i \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_\lambda}} \hat{p}_\lambda \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \hat{q}_\lambda &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda}} (\hat{a}_\lambda + \hat{a}_\lambda^\dagger) \\ \hat{p}_\lambda &= -i \sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2}} (\hat{a}_\lambda - \hat{a}_\lambda^\dagger) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \hat{H} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(\hat{n}_\lambda + \frac{1}{2} \right)$$

Photonenzahloperator

$$\hat{n}_\lambda = \hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda$$

Vertauschungsrelation von \hat{a}^\dagger, \hat{a} :

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[\hat{a}_\lambda, \hat{a}_{\lambda'}] = [\hat{a}_\lambda^\dagger, \hat{a}_{\lambda'}^\dagger] = 0$$

→ Photonen haben Charakter von Bosonen

• Zeitentwicklung von \hat{a}

$$\dot{\hat{a}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}]$$

→ Übung

$$\dot{\hat{a}} = i\omega\hat{a}$$

$$\rightarrow \hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{i\omega t}$$

Zurück zu dem Felder ergibt sich mit geeigneter Normierung

$$\hat{A}_k = \sum_{\lambda} \tilde{A}_{\lambda k}(r) (\hat{a}_{\lambda} + \hat{a}_{\lambda}^{\dagger})$$

$$\hat{E}_k = -\frac{1}{\epsilon_0} \hat{\Pi}_k = \sum_{\lambda} i\omega_{\lambda} \tilde{A}_{\lambda k}(r) (\hat{a}_{\lambda} - \hat{a}_{\lambda}^{\dagger})$$

$$\hat{B}_k = \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} A_j = \sum_{\lambda} \epsilon_{kij} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{\lambda j}(r) \hat{a}_{\lambda} + c.c.$$

nur eine Mode in x-Richtung

$$\hat{A} = \tilde{A}(r) \hat{a}_{\lambda} + \tilde{A}^*(r) \hat{a}_{\lambda}^{\dagger}$$

positiver
Frequenzanteil

negativer
Frequenzanteil

4.2. Quantenzustände des Lichtes

O. B. d. A. betrachte einmodiges Feld

$$\text{Hamiltonian } \hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right)$$

4.2.1. Fock Zustände

Fock Zustände $|n\rangle$: sind Eigenzustände von \hat{n}

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$$

Erzeugung von $|n\rangle$: n-maliges Anwenden von \hat{a}^{\dagger} auf Vakuumzustand

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^{\dagger})^n |0\rangle$$

↳ aus Normierung $\langle n|n \rangle = 1$

Wirkung von \hat{a}, \hat{a}^\dagger :

$$\rightarrow \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$$

Jeder reine Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich nach $|n\rangle$ entwickeln

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\psi\rangle$$

$|\langle n|\psi\rangle|^2$: Wahrscheinlichkeit n Photonen zu registrieren

• Photonenzahlstatistik im reinen Fock Zustand:

$$\langle \hat{n} \rangle = \langle n|\hat{n}|n\rangle = \langle n|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n} \langle n|\hat{a}^\dagger |n-1\rangle = n \langle n|n\rangle = \underline{\underline{n}}$$

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle (\hat{n} - n)^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle - n^2 = 0$$

Photonenzahl unterliegt
keiner Schwankung

→ Extremfall einer sub-Poisson
Statistik (keine Breite)

• Feldstärkestatistik im Fock Zustand

$$\hat{E} = c \hat{a} + c^* \hat{a}^\dagger$$

$$\text{Mittelwert } \langle n|\hat{E}|n\rangle = c \underbrace{\langle n|\hat{a}|n\rangle}_{=0} + c^* \langle n|\hat{a}^\dagger|n\rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Varianz } \langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle &= c^2 \underbrace{\langle \hat{a}^2 \rangle}_{=0} + c^2 \langle \hat{a}^{\dagger 2} \rangle + |c|^2 \underbrace{\langle (\hat{a} \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \rangle}_{\sqrt{n}\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} - \langle \hat{E} \rangle^2 \\ &= |c|^2 (2n+1) \\ &= |c|^2 (2\langle \hat{n} \rangle + 1) \end{aligned}$$

Bemerkung: • Schwankung nimmt mit wachsender Photonanzahl zu

- Im Vakuumzustand verschwindet die Schwankung nicht
→ Vakuum ist lebhafter Zustand

• Quadraturkomponenten

- definiere normierte Orts + Impulsoperatoren \hat{x}_1, \hat{x}_2

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^\dagger(0)$$

$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^\dagger(0))$$

Kommutator

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = 2i[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]$$

• Unschärferelation

$$\Delta \hat{x}_1 \Delta \hat{x}_2 \geq 1$$

$$\text{wobei } \langle n | \hat{x}_1 | n \rangle = 0 \\ \langle n | \hat{x}_2 | n \rangle = 0$$

im Vakuumzustand $|0\rangle$ gilt $\Delta \hat{x}_1 = \Delta \hat{x}_2 = 1$

Vakuumzustand minimiert die Unschärfe

Darstellung der Feldstärke durch \hat{x}_1 und \hat{x}_2 :

$$\hat{E} = c \left(\hat{a}(0) e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega t} \right)$$

benutze:

$$x_2 - ix_1 = -2i\hat{a}^\dagger(0)$$

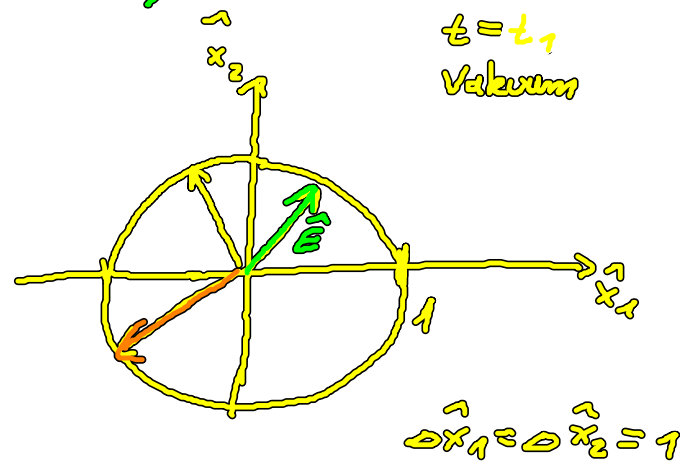
$$x_2 + ix_1 = 2i\hat{a}(0)$$

$$= C \left(\frac{1}{2i} e^{-i\omega t} (x_2 + ix_1) - \frac{1}{2i} (x_2 - ix_1) e^{i\omega t} \right)$$

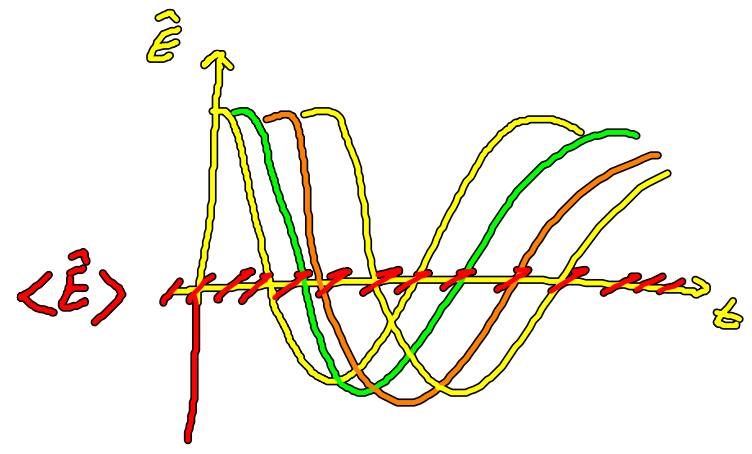
$$= C \left(x_2 \left(\frac{e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}}{2i} \right) + ix_1 \left(\frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2i} \right) \right)$$

$$= -C (\hat{x}_2 \sin \omega t + \hat{x}_1 \cos \omega t)$$

Vor. i
 $t = t_1$
 Vakuum



Amplitude des \hat{E} Feldes
 ist fest aber Phase ist
 unbestimmt



Resultat: Fock Zustand ist maximal unklar Energie

Frage: Kann man Zustände aus Fock-Zuständen „bauen“
 die annähernd klassische Eigenschaften haben

4.2.2. Glauber Zustände - Kohärente Zustände

Idee: minimale Unsicherheit hatte verschobener Vakuumzustand

Ansatz: solche Eigenzustände \hat{a} (Glauber Zustand)

EW-Gleichung: $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$

Entwicklung nach Fock Zuständen $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} c_n |n-1\rangle \stackrel{!}{=} \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$$

$$= \alpha \sum_{n=0}^{\infty} c_{n-1} |n-1\rangle$$

Index verschieben

$$\rightarrow c_n \sqrt{n} = \alpha c_{n-1}$$

Rekursives

Einsetzen:

$$c_n = \frac{\alpha}{\sqrt{n}} c_{n-1} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$
$$c_{n-1} = \frac{\alpha}{\sqrt{n-1}} c_{n-2}$$
$$c_{n-2} = \frac{\alpha}{\sqrt{n-2}} c_{n-3}$$

$$\rightarrow |\alpha\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

Poisson Verteilung der Photonen auf Fock Zustände

aus Normierung $\langle \alpha | \alpha \rangle = 1 = |c_0|^2 \sum_n \sum_{n'} \frac{\alpha^n \alpha^{n'}}{\sqrt{n!n'!}} \underbrace{\langle n | n' \rangle}_{\delta_{nn'}}$

$$= |c_0|^2 e^{-|\alpha|^2}$$

$$\rightarrow c_0 = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

Zustände sind
Bem.: nicht orthogonal
(nur näherungsweise)
 $|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}$

Applet: web.ift.uib.no/AMOS/MOV/HO/

Statistische Eigenschaften im Zustand $|\alpha\rangle$

• Feldstärkestatistik

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$$

Mittelwert $\langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \alpha + \alpha^\dagger | \alpha \rangle = 2|\alpha| \cos \theta$

$$= c|\alpha|e^{i\theta} + c|\alpha|e^{-i\theta}$$

Varianz $\langle (\Delta \hat{E})^2 \rangle = \langle \alpha | \hat{E}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle^2$

$$= \langle \alpha | c^2 (\underbrace{\alpha\alpha + \alpha^\dagger\alpha^\dagger}_{1+\alpha^\dagger\alpha} + \alpha\alpha^\dagger + \alpha^\dagger\alpha) | \alpha \rangle - 4|\alpha|^2 \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
&= c^2 \left(|a|^2 e^{2i\theta} + |a|^2 e^{-2i\theta} + 1 + 2|a|^2 \right) - 4c^2 \alpha^2 \frac{\hbar^2}{2m^2} \\
&= c^2 |a|^2 \underbrace{(2\cos 2\theta + 2 - 4\cos^2 \theta)}_0 + c^2 \\
&= \underline{\underline{c^2}}
\end{aligned}$$

→ Die Varianz der Feldstärke im
 gleichen Zustand $|a\rangle$ entspricht der Varianz im Vakuum
 Unscharfe unabhängig von α