

4.2.2. Glauber Zustände (Fortsetzung)

• Photonstatistik

$$\langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 = \bar{n}$$

mittlere Photonanzahl

$$\langle \alpha | \hat{n}^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \underbrace{\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}}_{[\hat{a}\hat{a}^\dagger]=1} | \alpha \rangle$$

$$= \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle$$

$$= |\alpha|^4 + |\alpha|^2 = \bar{n}^2 + \bar{n}$$

$$\text{Varianz: } \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \bar{n}^2 + \bar{n} - \bar{n}^2 = \bar{n}$$

• Photonanzahl „variiert“ um \bar{n} mit $\sqrt{\bar{n}}$

• nicht Null wie im Fock-Zustand

• Quadraturkomponenten \hat{x}_1, \hat{x}_2

$$\hat{x}_1 = \hat{a}(0) + \hat{a}^\dagger(0)$$

$$\hat{x}_2 = i(\hat{a}(0) - \hat{a}^\dagger(0))$$

$$\langle \alpha | \hat{x}_1 | \alpha \rangle = 2 \text{Re} \alpha$$

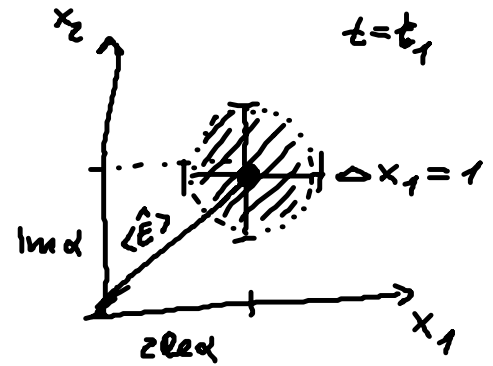
$$\langle \alpha | \hat{x}_2 | \alpha \rangle = 2 \operatorname{Im} \alpha$$

Ein modiges E-Feld:

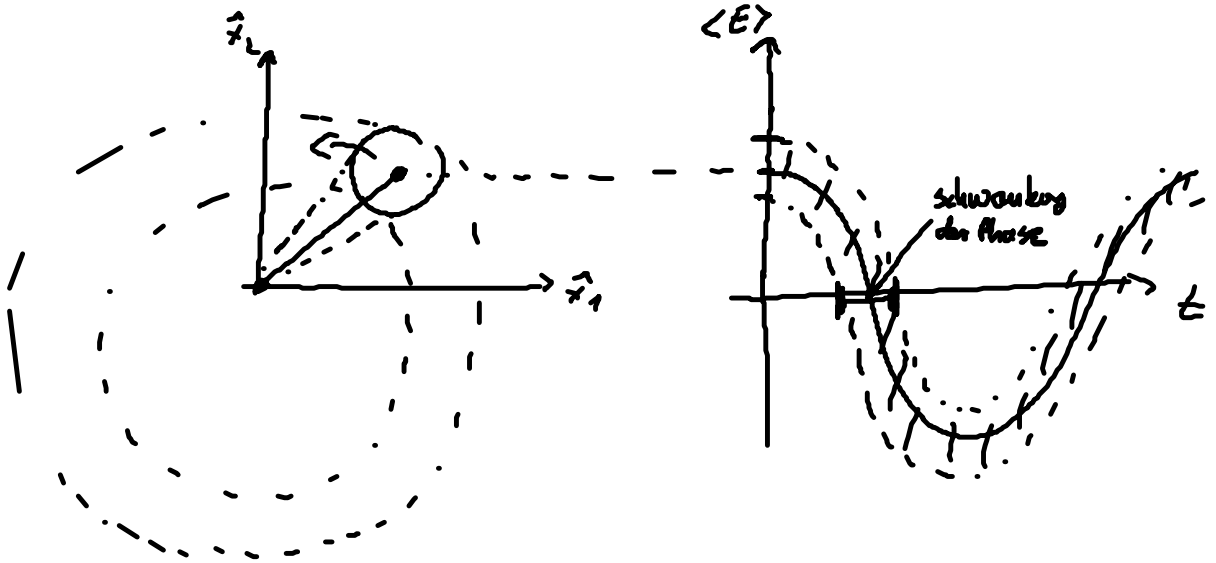
$$\vec{E} = -c(\hat{x}_2 \sin \omega t + \hat{x}_1 \cos \omega t)$$

Schwankung

$$\begin{aligned} \langle \alpha | (\Delta x_1)^2 | \alpha \rangle &= \langle \alpha | (\Delta x_2)^2 | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | \underbrace{aa^\dagger + a^\dagger a}_{1+a^\dagger a} + aa + a^\dagger a^\dagger | \alpha \rangle - (2 \operatorname{Re} \alpha)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$



• Zeitabhängigkeit $\alpha = \alpha_0 e^{-i\omega t}$



Bemerkung • $\frac{\sqrt{(\Delta n)^2}}{\langle n \rangle} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$

relative verschwindet für große Photonenzahl also große α

• im Glauber Zustand hat \vec{E} relativ bestimmte Phase + Amplitude

→ kommt klass. Elektromagnetischen Welle sehr nahe

- Glauber Zustände können durch QM Verschiebeoperator aus Vakuum erzeugt werden

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n (\hat{a}^\dagger)^n}_{\hat{D}(\alpha)} |0\rangle$$

$\hat{D}(\alpha)$ Verschiebeoperator

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |0\rangle$$

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}$$

Term ändert $|0\rangle$ nicht

es gilt $e^{A+B} = e^{-\frac{[A,B]}{2}} e^A e^B$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}}$$

- Warum Versch. Op?

$$D^{-1}(\alpha) \hat{a} D(\alpha) = \hat{a} + \alpha$$

$$D^{-1}(\alpha) \hat{a}^\dagger D(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*$$

→ Unitäre Transformation mit \hat{D} verschiebt \hat{a} um α

→ „verschiebt“ die Nulllage des Oszillators

- Warum wird $|\alpha\rangle$ kohärenter Zustand genannt?

\hat{a} in q -Darstellung $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} \left(m \omega q + \hbar \frac{\partial}{\partial q} \right)$ $\rho = -i \hbar \frac{\partial}{\partial q}$

es gilt $\hat{a}|0\rangle = 0$

DGL für \rightarrow
Vakuumzustand $\phi_0(q)$
in q -Darstellung $(m \omega q + \hbar \frac{\partial}{\partial q}) \phi_0(q) = 0$

Lösung: $\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}}$

Gauß-Verteilung

Wähle als Anfangsbedingung ein reelles Vakuum

$q_0 = \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \operatorname{Re} \alpha$

$\psi_{\alpha_0}(q) = \langle q | \alpha_0 \rangle = \langle q | D(\alpha_0) | 0 \rangle$

$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \operatorname{Im} \alpha$

$= e^{1/4 (\alpha_0^* q^2 - \alpha_0^2)} e^{i \frac{\rho_0}{\hbar} q} \phi_0(q - q_0)$

Zeitpunkt $t=0$

Zeitentwicklung

Hamiltonian: $\mathcal{H}|n\rangle = E_n|n\rangle = n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}$

$\psi_{\alpha}(q, t) = e^{-i/\hbar \mathcal{H} t} \underbrace{\psi_{\alpha_0}(q)}_{\text{Anfangsbedingung}}$

$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{n!} e^{-\frac{1}{\hbar} (n\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{2}) t} \phi_n(q)$

$= e^{-\frac{1}{2}\omega t} e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{n!} \phi_n(q)$

$$\alpha_0 e^{-i\omega t} = \alpha(t)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\omega t} \psi_{\alpha(t)}(q)$$

$$|\psi(q,t)|^2 = |e^{i/\hbar p_0(t) q} \phi(q - q_{\alpha(t)})|^2 = |\phi(q - q_{\alpha(t)})|^2$$

$$\rightarrow = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{\omega}{\hbar} (q - q_0 \cos \omega t)^2}$$

Wellenpaket, dass hin + her oszilliert ohne zu zerlaufen oder seine Form zu ändern

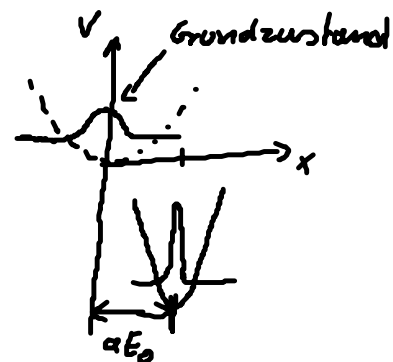
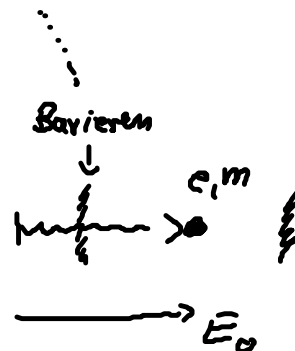
→ kohärenter Zustand

4.2.3. Gequetschte Zustände

Vorstellung: harmonischer Oszillator mit externem Feld

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 - eE_0 (ax - bx^2)$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} (k + 2cbE_0) x^2 - eaE_0 x$$



$b=0$: Lösung ist verschobener Grundzustand
Abschalten von E_0 liefert kohärenten Zustand

$b \neq 0$: entspricht zusätzlicher Barriere \rightarrow größere
Fockzustände

QM Formulierung

man benötigt 2 Photonum Prozesse im Hamiltonian

z.B. $\mathcal{H}_i = i\hbar (g \hat{a}^{\dagger 2} - g^* \hat{a}^2)$

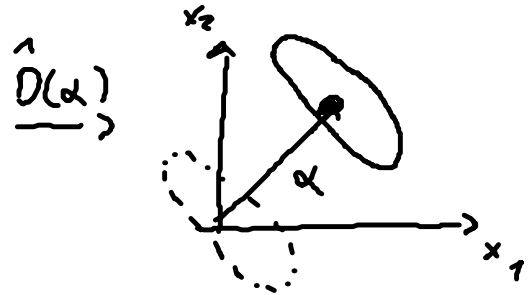
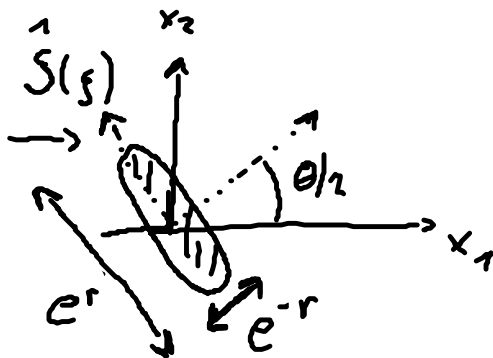
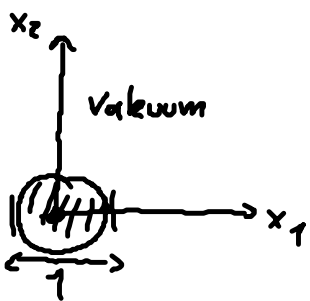
z.B. im nichtlinearen Kristall

Definiere einen Quetsch Operator $S(\xi)$

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2} \xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2} \xi \hat{a}^{\dagger 2}}$$

mit $\xi = r e^{i\theta}$

„Quetsch Parameter“



$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) |0\rangle$$

\uparrow
kohärent gequetschter Zustand

gedrehte Quadraturkomponenten

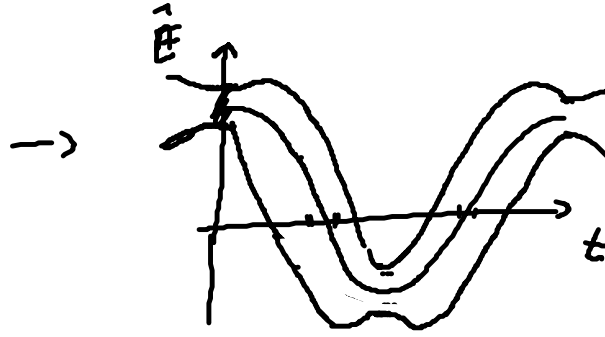
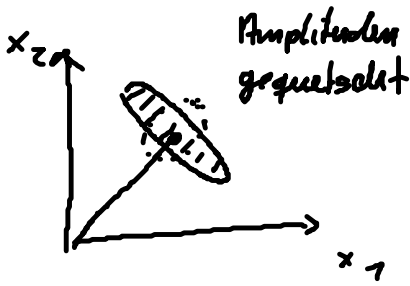
Def.: $y_1 + i y_2 = (x_1 + i x_2) e^{-i\theta/2}$

$$\begin{aligned} (\Delta y_1)^2 &= \langle y_1^2 \rangle - \langle y_1 \rangle^2 \\ &= e^{-2r} \end{aligned}$$

$$(\Delta y_2)^2 = e^{2r}$$

$$\rightarrow \Delta y_1 \Delta y_2 = 1$$

Querschwingung ist nicht-klassischer Effekt



- Fock Zustand ist maximal Amplituden gekoppelt aber kein kohärent gekoppelter Zustand

4.2.4. Verteilungsfunktion

- bisher: Diskussion der Quantenzustände des Lichtes in wohldefinierten Zuständen (reine Zustände)

• Realität: es liegt ein Gemisch von Zuständen vor

- Beschreibung durch Dichtematrixoperator

$$\hat{\rho} = \sum_{\gamma} P_{\gamma} |\gamma\rangle \langle \gamma|$$

$\hat{\rho}$ kann bzgl. Fock Zuständen entwickelt werden

$$\hat{\rho} = \sum_n \sum_m \rho_{nm} |n\rangle \langle m|$$

$\hat{\rho}$ bzgl. Glauber Zuständen entwickelt

$$\hat{\rho} = \iint \frac{d^2\alpha}{\pi} \frac{d^2\beta}{\pi} |\alpha\rangle \underbrace{\langle \alpha | \hat{\rho} | \beta \rangle}_{R(\alpha, \beta)} \langle \beta|$$

$$R(\alpha, \beta)$$

Q -Repräsentation der
Ordnungsmatrix

• andere Möglichkeit: diagonale Kohärente Repräsentation

P -Repräsentation

$$\rho = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha$$

→ d.h. wir pressen wir die QM in ein
klassisches Format

• funktioniert gut z.B. bei thermischem Licht
bei Glauber Zuständen

ABER z.B. bei Fock Zuständen
ist P nicht wohldefiniert