Phasenraumfunktionen: P-Repräsentation

Ziel: $\hat{\rho} = \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha$

Mittelwert von $\hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^+) = \sum_n \sum_m c_{nm} (\hat{a}^+)^n \hat{a}^m$

($\hat{O}$ ist ein normalgeordneter Operator)
"$\hat{a}^+$ links, $\hat{a}$ rechts"

$$\langle \hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^+) \rangle = tr[\hat{\rho}\, \hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^+)]$$
$$= \sum_n \sum_m c_{nm}\, tr(\rho\, (a^+)^n a^m)$$

Definiere operatorwertige δ-Fkt

$$\delta(\alpha^* - \hat{a}^+)\, \delta(\alpha - \hat{a})$$
$$= \frac{1}{\pi^2} \int e^{-\beta(\alpha^* - \hat{a}^+)} e^{\beta^*(\alpha - \hat{a})} d^2\beta$$

$$= \int d^2\alpha \underline{\sum_n \sum_m c_{nm}}\, tr[\rho\, \delta(\alpha^* - \hat{a}^+)\, \delta(\alpha - \hat{a})]\, \underline{(\alpha^*)^n \alpha^m}$$

$\hat{=} O(\alpha, \alpha^*)$

$$= \int d^2\alpha\, P(\alpha, \alpha^*)\, O(\alpha, \alpha^*) = \langle \hat{O}(\hat{a}, \hat{a}^+) \rangle$$

wobei $P(\alpha, \alpha^*) = tr[\hat{\rho}\, \delta(\alpha^* - \hat{a}^+)\, \delta(\alpha - \hat{a})]$

Bestimmung von P aus $\hat{\rho}$:

1) $\langle -\beta|\hat{\varrho}|\beta\rangle$

2) $$P(\alpha,\alpha^*) = \frac{e^{|\alpha|^2}}{\pi^2}\int \langle -\beta|\hat{\varrho}|\beta\rangle\, e^{|\beta|^2} e^{-\beta\alpha^* + \beta^*\alpha}\, d^2\beta$$

"Coherent state representation"

Eigenschaften von P:

$$\mathrm{tr}\,\varrho = 1 \quad \rightarrow \quad \int P(\alpha,\alpha^*)\, d^2\alpha = 1$$

$$\hat{\varrho} = \int P(\alpha,\alpha^*)\, |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha$$

Bsp.
- thermisches Licht $\quad \varrho_{nn} = \frac{\bar{n}^n}{(1+\bar{n})^{n+1}}$

$$\rightarrow P(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi\bar{n}}\, e^{\frac{-|\alpha|^2}{\bar{n}}}$$

(Gauß Verteilung bzgl. der kohärenten Zustände)

- kohärenter Zustand $|\alpha_0\rangle$

$$P(\alpha,\alpha^*) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha_0)$$

Bemerkung: andere mögliche Repräsentationen

① z.B. Q-Repräsentation für antinormal geordnete Operatoren $\hat{A}$

$$\langle \hat{A}(a,a^+)\rangle = \int Q(\alpha,\alpha^*)\, A(\alpha,\alpha^*)\, d^2\alpha$$

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \mathrm{tr}\left[\varrho\, \delta(\alpha - \hat{a})\, \delta(\alpha^* - \hat{a}^+)\right]$$

$$Q(\alpha,\alpha^*) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\hat{\varrho}|\alpha\rangle$$

② Wigner - Weyl Repräsentation für symm. Operatoren

4.3. Photonenkorrelationen

4.3.1 Photonendetektion

z.B. Photoionization (absorbiert photon)

→ nur Vernichter von $\vec{E}(r,t)$ tragen bei

→ nur $E^{(+)}(r,t) = \sum_\lambda \zeta_\lambda \hat{a}_\lambda$

① • Wahrscheinlichkeit ein Photon an Position $\underline{r}$ pro dt zu detektieren

$$\tilde{\omega}_1(\underline{r},t) = \left| \langle \underset{\text{Endzustand}}{f} | \hat{E}^{(+)}(r,t) | \underset{\text{Anfangszustand}}{i} \rangle \right|^2$$

End-Zustand $\langle f|$ unbekannt → Summe über alle $|f\rangle$ nötig

$$\omega_1(r,t) = \sum_f \tilde{\omega}_1(\underline{r},t)$$

$$= \sum_f \langle f | \hat{E}^{(+)*} \underbrace{|i\rangle \langle f|}_{\text{nur} \neq 0 \text{ für } i=f} \hat{E}^{(+)} | i \rangle$$

$$= \langle i | \hat{E}^{(-)} \hat{E}^{(+)} | i \rangle$$

Wahrscheinlichkeit ein Photon zu detektieren ist Mittelwert von $E^{(-)}E^{(+)}$

gemischter Zustand

$$w_1(r,t) = \mathrm{tr}\left(\rho\, E^{(-)}(r,t)\, E^{(+)}(r,t)\right)$$

4.3.2. Korrelationsfunktionen

▷ Def: Korrelation 1. Ordnung des Feldes

$$G^{(1)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, t_1, t_2) = \langle E^{(-)}(r_1, t_1)\, E^{(+)}(r_2, t_2) \rangle$$

$\tau = t_2 - t_1$

invariant bei Verschiebung der Zeit

$$= G^{(1)}(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \tau)$$

$$w_1(r,t) = G^{(1)}(\underline{r}, \underline{r}, 0)$$

klassisch kann $G^{(1)}(\underline{r}, \underline{r}, \tau)$ aus spektralen Leistungsdichte bestimmt werden

② Detektion von 2 Photonen

$$\tilde{w}_2(r_1, t_1, r_2, t_2) = |\langle f | E^{(+)}(r_2, t_2)\, E^{(+)}(r_1, t_1) | i \rangle|^2$$

⋮ Analog zu ①

$$w_2(r_1,t_1,r_2,t_2) = tr\left(\hat{\rho}\, E^{(-)}(r_1,t_1)\, E^{(-)}(r_2,t_2) E^{(+)}(r_2,t_2) E^{(+)}(r_1,t_1)\right)$$

▶ Def.: Korrelationsfunktion 2 Ordnung des Feldes

$$G^{(2)}(r_1,r_2,r_3,r_4,t_1,t_2,t_3,t_4)$$

$$= \langle E^{(-)}(r_1,t_1)\, E^{(-)}(r_2,t_2)\, E^{(+)}(r_3,t_3)\, E^{(+)}(r_4,t_4) \rangle$$

Normalordnung

$\rightarrow G^{(2)} \neq \langle I, I \rangle$

wenn $\langle I \rangle = \langle E^{(-)} E^{(+)} \rangle$

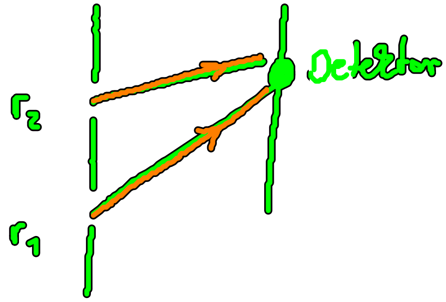
Einführung von normierte Korrelationsfunktionen mit $r_1 = r_2$
(für einmodiges Feld)

- $$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^+(t)\, \hat{a}(t+\tau) \rangle}{\sqrt{\langle a^+ a \rangle}\sqrt{\langle a^+(t+\tau)\, a(t+\tau) \rangle}} = \frac{\langle a^+(t)\, a(t+\tau) \rangle}{\langle a^+ a \rangle}$$

- $$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle \hat{a}^+(t)\hat{a}^+(t+\tau)\hat{a}(t+\tau)\hat{a}(t) \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2}$$

4.3.3. Bedeutung von $g^{(1)}$ und $g^{(2)}$

z.B. Doppelspaltexperiment



E-Feld:

$$E^{(+)} = c_1 E^{(+)}(r_1, t-t_1) + c_2 E^{(+)}(r_2, t-t_2)$$

gemessene Intensität

$$\langle I \rangle = tr(\rho E^{(-)} E^{(+)})$$

$$= c_1^2 G^{(1)}(r_1, r_1, 0) + c_2^2 G^{(1)}(r_2, r_2, 0)$$

$$\underbrace{+ 2\,\mathrm{Re}\left[c_1^* c_2 G^{(1)}(r_1, r_2, \tau)\right]}$$

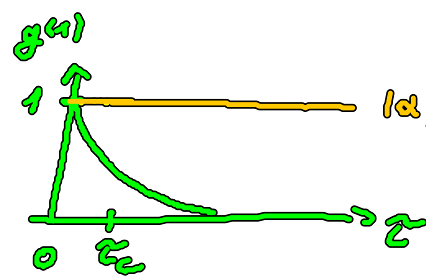
$$= \mathrm{Re}\left[g^{(1)}(r_1, r_2, \tau)\right] \cdot 2\left[\langle I^{(1)}(r)\rangle \langle I^{(2)}(r)\rangle\right]^{1/2}$$

$g^{(1)}(\tau) = 0 \rightarrow$ keine Interferenzstreifen (unkorrelierte Lichtquelle)

$g^{(1)}(\tau) = 1 \rightarrow$ beste Interferenzstreifen (total kohärentes Licht)

__Bsp.:__ thermisches Licht: $G^{(1)}(r_1, r_2, \tau) = \varepsilon_0^2 \, e^{-i\omega_0 \tau - \frac{\tau^2}{2\tau_c^2}}$

$$g^{(1)}(\tau) = \frac{\langle a^+(t) a(t+\tau)\rangle}{\langle a^+ a\rangle}$$



$\frac{1}{\tau_c}$ ist Kohärenzzeit = Bandbreite des Lichtes

Wiener-Khinchin-Theorem

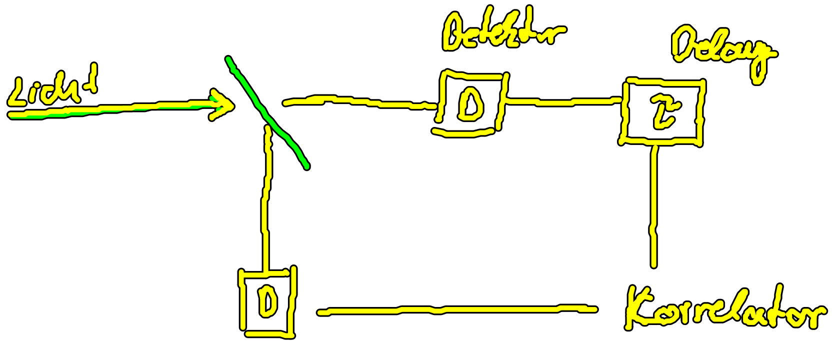
Frequenzspektrum: $S(r, \omega) = \frac{\varepsilon_0^2 \tau_c}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega-\omega_0)^2 \tau_c^2}{2}}$

Bedeutung von $g^{(2)}$:

- wie kann man Laser von Glühlampe unterscheiden wenn Intensität + spektrale Breite gleich sind

Hanbury-Brown-Twiss Experiment

1954 Phil. Mag 45, 663
(1956) Nature 178, 1046



Bsp. ebene Welle $\hat{E}^+ = \mathcal{E}_k \left(\hat{a}_k e^{ikr_i} + \hat{a}_{k'} e^{ik'r_i} \right)$

$$G^{(2)}(r_1,r_2,0) = \langle E^{(-)}(r_1,t)\, E^{(-)}(r_2,t)\, E^{(+)}(r_2,t)\, E^{(+)}(r_1,t) \rangle$$

$$= \Big\langle \mathcal{E}_k^4 \Big(\overbrace{a_k^+ a_k^+ a_k a_k} + \overbrace{a_{k'}^+ a_{k'}^+ a_{k'} a_{k'}} + a_k^+ a_{k'}^+ a_k a_{k'} \left[1 + e^{-i(k-k')(r_1-r_2)} \right] + a_{k'}^+ a_k^+ a_{k'} a_k \left[1 + e^{i(k-k')(r_1-r_2)} \right] \Big) \Big\rangle$$

$$\left(\underline{\text{UR}}:\ a_k^+ a_k^+ a_k a_k = \underbrace{a_k^+ a_k a_k^+ a_k}_{\langle n^2 \rangle} + \underbrace{a_k^+ a_k}_{\langle n \rangle} \right)$$

$$= 2\mathcal{E}^4 \Big(\langle n^2\rangle - \langle n\rangle + \langle n\rangle^2 \underbrace{\big\{ 1 + \cos\{(k-k')(r_1-r_2)\}\big\}}_{\substack{\text{Interferenzterm} \\ =1 \text{ für } r_1=r_2}} \Big)$$

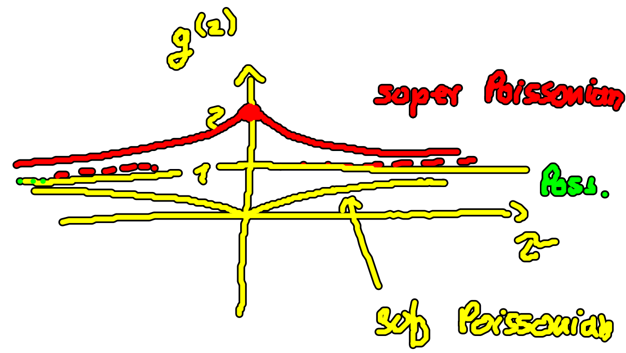
thermisches Licht: $\langle n^2\rangle = 2\langle n\rangle^2 + \langle n\rangle$

(Laser) kohärenten Zustand: $\langle n^2\rangle = \langle n\rangle^2 + \langle n\rangle$

$$\Rightarrow \quad g^{(2)}(0)^{\text{therm}} = 2$$

$$g^{(2)}(0)^{\text{Laser}} = 1$$

$$g^{(2)}(0)^{\text{Fock}\,|n_0\rangle} = 1 - \frac{1}{n_0}$$



4.3.4. Bedingung für Licht - klassisches Licht

klassisch folgt aus Schwarz-Ungleichung

$$|\langle I(t) I(t+\tau)\rangle|^2 \leq \langle I^2(t)\rangle \langle I^2(t+\tau)\rangle$$

$$g^{(2)}(\tau) \leq g^{(2)}(0)$$

d.h. Photonen treffen lieber ohne Zeitdifferenz auf

-> bunching

therm. Licht:

"bunch"

Fock Zustand:

kohärentes Licht: $g^{(2)}(\tau) = g^{(2)}(0)$ Grenzfall

Nichtklassisches Licht:

(I) : $g^{(2)}(\tau) > g^{(2)}(0)$ "lieber nicht zusammen eintreffen"

anti-bunched

(II) $g^{(2)}(0) < 1$ ist Bedingung (auch aus Schwarz Ungleichung)

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^+ a^+ a a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2} < 1$$

$$\langle a^+ a^+ a a \rangle - \langle a^+ a \rangle^2 < 0$$

in P-Repräsentation $\int P(\alpha,\alpha^*) \left(|\alpha|^4 - \langle a^+ a \rangle^2 \right) d^2\alpha < 0$

$$\int P(\alpha,\alpha^*) \underbrace{\left(|\alpha|^2 - \langle a^+ a \rangle \right)^2}_{> 0} d^2\alpha < 0$$

$\rightarrow$ $P(\alpha,\alpha^*)$ für klassisches Licht ist positiv

sobald $P < 0$ liegt nichtklassischer Zustand vor

$\rightarrow$ sub-Poisson Verteilung