4.4.5 Atom in einer Kavität mit einer Lichtmode + Rauschen

Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{AF} + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_{FR}$$

$\mathcal{H}_F \to \hbar\omega a^+ a$

$\mathcal{H}_A \to \frac{1}{2}\hbar\omega_a \sigma_z$

$\mathcal{H}_{AF} \to \hbar g(\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)$ [4.4.2.]

$\mathcal{H}_R \to \sum_k \hbar\omega_k b_k^+ b_k$

$\mathcal{H}_{FR} \to \hbar \sum_k g_k^F (b_k^+ a + a^+ b_k)$

Wir wollen Zeitentwicklung von $\langle a^+ a \rangle$ Feldenergie und $\langle \sigma_z \rangle$ Inversion beschreiben

(Zeitentwicklung durch $\mathcal{H}_F$, $\mathcal{H}_A$ wird durch SVA abgespalten $\tilde{a} = a e^{i\omega t}$)

$$\dot{\tilde{a}} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{a}, \mathcal{H}_{AF}] + \frac{1}{i\hbar} [\tilde{a}, \mathcal{H}_{FR}]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \tilde{a} \Big|_{coh.}}_{\text{aus } 4.4.2.} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \tilde{a} \Big|_{incoh.}}_{\text{aus } 4.4.4.}$$

$\dot{\tilde{a}} = -ig\sigma_-$

$\dot{\tilde{a}}^+ = ig\sigma_+$

$$\dot{\tilde{a}} = -\frac{1}{2}\gamma_1 \tilde{a} + F_{\tilde{a}}(t)$$

Berechnen $\frac{d}{dt}\langle \tilde{a}^+ \tilde{a} \rangle = \langle \dot{\tilde{a}}^+ \tilde{a} \rangle + \langle \tilde{a}^+ \dot{\tilde{a}} \rangle$

$$= ig \langle \sigma_+ \tilde{a} - \tilde{a}^+ \sigma_- \rangle - \gamma_1 \langle \tilde{a}^+ \tilde{a} \rangle + \gamma_1 \bar{n}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \tilde{\sigma}_z \rangle = \langle \frac{1}{i\hbar} [\tilde{\sigma}_z, \mathcal{H}_{AF}] \rangle$$

$$= \langle \frac{\hbar g}{i\hbar} (\tilde{\sigma}_z \tilde{\sigma}_+ \tilde{a} + \tilde{\sigma}_z \tilde{a}^+ \tilde{\sigma}_- - \tilde{\sigma}_+ \tilde{a} \tilde{\sigma}_z - \tilde{a}^+ \tilde{\sigma}_- \tilde{\sigma}_z) \rangle$$

$$= \langle -ig (2\tilde{a}\tilde{\sigma}_+ - 2\tilde{a}^+ \tilde{\sigma}_-) \rangle$$

$$= -2ig \langle \tilde{\sigma}_+ \tilde{a} - \tilde{a}^+ \tilde{\sigma}_- \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \sigma_z \rangle \Big|_{\mathcal{H}_{AF} / coh.}$$

(bekannt:
$[\sigma_z, \sigma_+] = 2\sigma_+$
$[\sigma_z, \sigma_-] = -2\sigma_-$
$[\sigma_z, \sigma_z] = 0$)

<u>Problem:</u> $\langle \sigma_+ a - \sigma_- a^+ \rangle$ enthält eigene Dynamik
$\rightarrow$ unendliches System an gekoppelten Gleichungen

Hierachie - Problem

da: $\frac{d}{dt}\langle\tilde{\sigma}_+\tilde{a}\rangle = \langle\dot{\tilde{a}}^+\tilde{\sigma}_-\rangle + \langle\tilde{a}^+\dot{\tilde{\sigma}}_-\rangle$

$= \langle ig\,\tilde{\sigma}_+\tilde{\sigma}_-\rangle + ig\langle\tilde{a}^+\tilde{\sigma}_z\tilde{a}\rangle$

bekannt aus 4.4.2

$\dot{\sigma}_- = -i\omega_a\sigma_- + ig\sigma_z a$

$\dot{\tilde{\sigma}}_- = ig\tilde{\sigma}_z\tilde{a}$

wieder eigene Dynamik

⋮

Für dieses Problem kann exaktes DGL System finden mit

AB: Atom in $|a\rangle$

Feld in $|0\rangle$ $\Rightarrow$ es kann nur ein Photon in Kavität sein

$\bar{n}_{th} = 0$

$\rightarrow$ alle Mittelwerte mit quadratischen oder höheren Termen in $\hat{a}$ verschwinden

$\Rightarrow$ <u>DGL System</u>

$\frac{d}{dt}\langle a^+a\rangle = gA_1 - \gamma\langle a^+a\rangle$

$A_1 = i\langle\sigma_+a - a^+\sigma_-\rangle$

$A_2 = i\langle a^+\sigma_z a\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle\sigma_z\rangle = -2gA_1$

$\dot{A}_1 = g\langle\sigma_z\rangle + g + 2gA_2 - \overbrace{\frac{\gamma}{2}A_1}^{\text{incoh.}}$

$\dot{A}_2 = -gA_1 - \gamma A_2$

$\sigma_+\sigma_- - \mathbb{1}$

$|a\rangle\langle b|b\rangle\langle a|$

$|a\rangle\langle a| - |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle$

Interessant ist Besetzung von Zustand $|a\rangle$: $\frac{1}{2}\left(\langle\sigma_z\rangle + 1\right) = P_a$

$$\rho_a = \left\langle \frac{1}{2}\left(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b| + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| \right) \right\rangle$$

zwei Zeitkonstanten:

I) Licht-Licht Kopplung γ_1

II) Licht-Materie g

① Fall $\gamma_1 \gg 4g$

schwache Kopplung Atom + Mode

$$\rho_a(t) = e^{-\frac{4g^2}{\gamma_1} t} = e^{-\gamma_c t}$$

② Fall $\gamma_1 \ll 4g$

starke Kopplung

$$\rho_a(t) = \frac{e^{-\gamma_1/2\, t}}{2} \left(1 + \cos 2gt\right)$$

Dämpfung ↑ ↑ Rabi Oszillation

→ Ein Atom in einer Kavität zerfällt anders als im Vakuum (Zerfall mit $W = 2\pi \frac{\omega \mu^2}{2V\hbar 3 \varepsilon_0} \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} = 2\pi g^2 D(\omega)$)

$$\gamma_c = \frac{4g^2}{\gamma_1} = 4g^2 \frac{Q}{\omega}$$
$$= 2\pi g^2 D_c(\omega)$$

in der Kavität anderes Modenspektrum

$$D_c(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega/2Q}{(\tilde{\omega} - \omega)^2 + \left(\frac{\omega}{2Q}\right)^2}$$

$D_c(\omega) = \frac{2Q}{\pi\omega}$

Zusammenfassung

(4.4.3.)

Zerfall des Atoms mit $W = 2\pi g_k^2 D(\omega)$
• Dichtematrix formalismus

Zerfall mit γ_c
ODER
gedämpfte Rabi Oszillationen $\leftarrow$ | Atom $\xleftrightarrow{g_k}$ Mode $\xleftrightarrow{g_k^F}$ Reservoir

• Exakt.
Rabi Osz.
Collapse & Revival

(4.4.2)

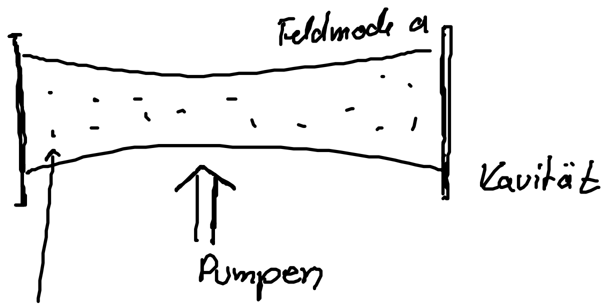
• Quanten Operator Ans.
Dämpfung mit γ_1

$\gamma_1 = \frac{\omega}{Q} = 2\pi g_\omega^{F2} D(\omega)$

(4.4.4.)

4.5. Laser Gleichungen

Laser: System fern vom Gleichgewicht



Atome
Index μ und Pauli-
Operatoren $\sigma_\mu^+, \sigma_\mu^-, \sigma_\mu^z$

Reservoir ① R_1
Pumpmechanismus:
Kontakt mit Reservoir neg. T

Reservoir ② R_2

Vakuum Reservoir für Dämpfg der Mode in Kavität

Hamiltonian

Kohärente WW

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{FR_2} + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{AR_1} + \mathcal{H}_{AF}$$

$\mathcal{H}_A = \frac{1}{2}\sum_\mu \hbar\omega_a \sigma_z$

$$\mathcal{H}_{AF} = \sum_\mu \hbar g \left(\sigma_\mu^+ a + a^+ \sigma_\mu^-\right)$$

RWA + Dipol Näherung

$\mathcal{H}_{FR_2}$: incohärenter Feldanteil (Dämpfung + Rauschen)

$\mathcal{H}_{AR_1}$: Kopplung an Pump Reservoir
- Incohärenter Anteil für Atome (Dämpfg + Rauschen)

- Dynamik durch $\mathcal{H}_F$ und $\mathcal{H}_A$ kann durch SVA abgespalten werden

$$\dot{a} = -\frac{\gamma}{2}a \underbrace{- ig\sum_\mu \sigma_\mu^-}_{[a,\, H_{AF}]} + \hat{F}^a(t)$$

incohärenter Anteil durch R_2

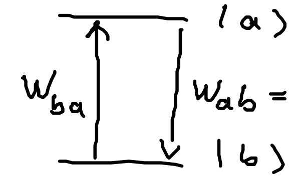
$$\dot{\sigma}_\mu^+ = -\frac{\tilde{W}}{2}\sigma_\mu^+ - ig\, a^+\sigma_\mu^z + \hat{F}_{ab}^\mu$$

Rauschen durch R_1

Atom Lebensdauer

$$\tilde{W} = W(2\bar{n}_\mu + 1) = W_{ba} + W_{ab}$$
$$W = W_{ba} - W_{ab}$$

$$\dot{\sigma}_\mu^z = \underbrace{-\tilde{W}\sigma_\mu^z + W}_{[\sigma^z,\, \mathcal{H}_{AR_1}]} + \underbrace{2ig\left(a^+\sigma_\mu^- - a\sigma_\mu^+\right)}_{[\sigma^z,\, \mathcal{H}_{AF}]} + \hat{F}_{aa}^\mu - \hat{F}_{bb}^\mu$$



- QM Eigenschaften des Reservoir stecken in den Rausch Operatoren

mittlere Photonenzahl in R_2

Feld:

$$\langle F^{a+}(t)\, F^{a}(t')\rangle = \gamma\, \bar n_\mu\, \delta(t-t') \qquad \hat F^a = -i \sum_k g_k^F\, b_k(0)\, e^{-i\omega_k t}$$

$$\langle F^{a}(t)\, F^{a+}(t')\rangle = \gamma\, (\bar n_\mu + 1)\, \delta(t-t')$$

Atome:

$$\hat F_z^\mu = \hat F_{aa} - \hat F_{bb} = 2 \sum_k g_k^A\, b_k^A(0)\, \hat\sigma_\mu^- - 2 \sum_k g_k^A\, b_k^{A+}\, \hat\sigma_\mu^+$$

$$\hat F_{ab}^\mu = \sum_k g_k^A\, b_k^+\, \hat\sigma_z \qquad \hat= \left(\text{für } [\sigma_-, H_{AF}] \quad \dot\sigma_- = i g\, \sigma_z\, a \right)$$

$$\langle \hat F_{ab}^\mu(t)\, \hat F_{ba}^\mu(t')\rangle = \sum_k \sum_{k'} g_k^A\, g_{k'}^{A*}\, \langle b_k^+ b_k \rangle_{R_2}$$

Photonenzahl im Mittel in R_2

Pump Reservoir

$$= W\,(\bar n + 1)\, \delta(t-t') = W_{ba}\, \delta(t-t')$$

$$\langle F_{ba}^\mu(t)\, F_{ab}^\mu(t')\rangle = W_{ab}\, \delta(t-t')$$

$$\langle \hat F_{ab}^\mu(t),\, F_z^\mu(t')\rangle = -2\,\sigma_\mu^-\,(\bar n + 1)\, W\, \delta(t-t') = -2\,\sigma_\mu^-\, W_{ba}\, \delta(t-t')$$

Aufsummieren liefert Gleichungen für gesamt Polarisation $\hat P^- = -i \sum_\mu \sigma_\mu^-$

$$\hat P^+ = i \sum_\mu \sigma_\mu^+$$

und gesamt Inversion $\hat D_z = \sum_\mu \sigma_\mu^z$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\hat{a}} &= \left(-i\omega - \frac{\gamma}{2}\right)\hat{a} + g\,\hat{p}^- + \hat{F}^a(t)\\ \dot{\hat{p}}^+ &= \left(i\omega_a - \frac{\tilde{W}}{2}\right)\hat{p}^+ + g\,a^+\hat{D} + \hat{F}_{ab}(t)\\ \dot{\hat{D}} &= -\tilde{W}\hat{D} + W - 2g\left(\hat{a}^+\hat{p}^- + \hat{a}\,\hat{p}^+\right) + \hat{F}_z(t)\end{aligned}}$$

$$F_{ab} = \sum F_{ab}^{\mu}$$

Laser Gleichungen für Atom Laser mit voll quantisiertem Licht

Übergang zur semiklassischen Beschreibung

- Mittelwertbildung -> Rauschterme fallen weg

$$\langle \hat{a}^+ \sigma_z \rangle \approx \langle a \rangle \langle \sigma_z \rangle$$

$$\langle \sigma_\mu^- \hat{a}^+ \rangle \approx \langle \sigma_\mu \rangle \langle a^+ \rangle$$

$$\langle \sigma_\mu^+ a \rangle \approx \langle \sigma_\mu^+ \rangle \langle a \rangle$$