4.4.5 Atom in einer Kavität mit einer Lichtmode + Rauschen

Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{AF} + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_{FR}$$

$\mathcal{H}_F \to \hbar\omega a^+ a$

$\mathcal{H}_A \to \frac{1}{2}\hbar\omega_a \sigma_z$

$\mathcal{H}_R \to \sum_k \hbar\omega_k b_k^+ b_k$

$\mathcal{H}_{FR} \to \hbar \sum_k g_k^F (b_k^+ a + a^+ b_k)$

$\mathcal{H}_{AF} \to \hbar g(\sigma_+ a + a^+ \sigma_-)$ [4.4.2.]

Wir wollen Zeitentwicklung von $\langle a^+ a \rangle$ Feldenergie
und $\langle \sigma_z \rangle$ Inversion beschreiben

(Zeitentwicklung durch $\mathcal{H}_F$, $\mathcal{H}_A$
wird durch SVA abgespalten
$\tilde{a} = a e^{i\omega t}$)

$$\dot{\tilde{a}} = \frac{1}{i\hbar}[\tilde{a}, \mathcal{H}_{AF}] + \frac{1}{i\hbar}[\tilde{a}, \mathcal{H}_{FR}]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\tilde{a}\Big|_{coh.}}_{\text{aus 4.4.2.}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\tilde{a}\Big|_{inkoh.}}_{\text{aus 4.4.4.}}$$

$$\dot{\tilde{a}} = -ig\sigma_-$$

$$\dot{\tilde{a}}^+ = ig\sigma_+$$

$$\dot{\tilde{a}} = -\frac{1}{2}\gamma\tilde{a} + F_{\tilde{a}}(t)$$

Berechnen $\frac{d}{dt}\langle \tilde{a}^+ \tilde{a} \rangle = \langle \dot{\tilde{a}}^+ \tilde{a} \rangle + \langle \tilde{a}^+ \dot{\tilde{a}} \rangle$

$$= ig\langle \sigma_+\tilde{a} - \tilde{a}^+\sigma_- \rangle - \gamma\langle \tilde{a}^+\tilde{a} \rangle + \gamma\bar{n}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \tilde{\sigma}_z \rangle = \left\langle \frac{1}{i\hbar}[\tilde{\sigma}_z, \mathcal{H}_{AF}] \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\hbar g}{i\hbar}\left(\tilde{\sigma}_z\tilde{\sigma}_+\tilde{a} + \tilde{\sigma}_z\tilde{a}^+\tilde{\sigma}_- - \tilde{\sigma}_+\tilde{a}\tilde{\sigma}_z - \tilde{a}^+\tilde{\sigma}_-\tilde{\sigma}_z\right) \right\rangle$$

$$= \langle -ig(2\tilde{a}\tilde{\sigma}_+ - 2\tilde{a}^+\tilde{\sigma}_-) \rangle$$

$$= -2ig\langle \tilde{\sigma}_+\tilde{a} - \tilde{a}^+\tilde{\sigma}_- \rangle = \frac{\partial}{\partial t}\langle \sigma_z \rangle\Big|_{\mathcal{H}_{AF}/\text{coh.}}$$

bekannt:

$$\left(\begin{array}{l} [\sigma_z, \sigma_+] = 2\sigma_+ \\ [\sigma_z, \sigma_-] = -2\sigma_- \\ [\sigma_z, \sigma_z] = 0 \end{array} \right)$$

Problem: $\langle \sigma_+ a - \sigma_- a^+ \rangle$ enthält eigene Dynamik
$\rightarrow$ unendliches System an gekoppelten Gleichungen

Hierarchie - Problem

da: $\frac{d}{dt}\langle \tilde{\sigma}_+ \tilde{a}\rangle = \langle \dot{\tilde{a}}^+ \tilde{\sigma}_-\rangle + \langle \tilde{a}^+ \dot{\tilde{\sigma}}_-\rangle$

bekannt aus 4.4.2

$\dot{\sigma}_- = -i\omega_a\sigma_- + ig\sigma_z a$

$\dot{\tilde{\sigma}}_- = ig\tilde{\sigma}_z\tilde{a}$

$= \langle ig\tilde{\sigma}_+\tilde{\sigma}_-\rangle + ig\langle \tilde{a}^+\tilde{\sigma}_z\tilde{a}\rangle$

wieder eigene Dynamik

⋮

Für dieses Problem kann exaktes DGL System finden mit

AB: Atom in $|a\rangle$
Feld in $|0\rangle$ $\Rightarrow$ es kann nur ein Photon in Kavität sein
$\bar{n}_{th} = 0$

$\rightarrow$ alle Mittelwerte mit quadratischen oder höheren Termen in $\tilde{a}$ verschwinden

$\Rightarrow$ DGL System

$\frac{d}{dt}\langle a^+a\rangle = gA_1 - \gamma\langle a^+a\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle\sigma_z\rangle = -2gA_1$

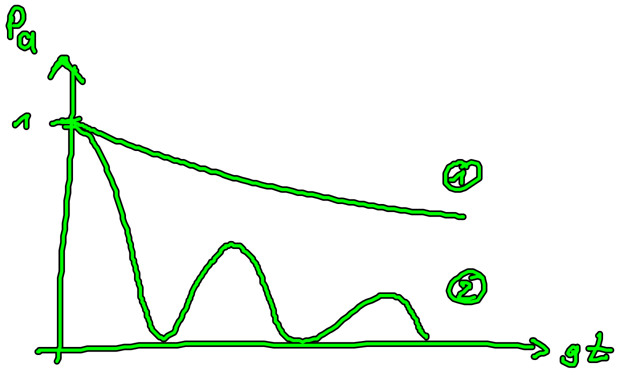
$\dot{A}_1 = g\langle\sigma_z\rangle + g + 2gA_2 - \overbrace{\frac{\gamma}{2}A_1}^{\text{incoh.}}$

$\dot{A}_2 = -gA_1 - \gamma A_2$

$A_1 = i\langle\sigma_+ a - a^+\sigma_-\rangle$
$A_2 = i\langle a^+\sigma_z a\rangle$

$\sigma_+\sigma_- - \mathbb{1}$
$|a\rangle\langle b|b\rangle\langle a|$
$|a\rangle\langle a| - |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle$

Interessant ist Besetzung von Zustand $|a\rangle$: $\frac{1}{2}(\langle\sigma_z\rangle + 1) = P_a$



$$\rho_a = \left\langle \frac{1}{2}\left(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle \ddot{b}| + |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle \dot{b}| \right)\right\rangle$$

zwei Zeitkonstanten:

I) Licht-Licht Kopplung γ_1

II) Licht-Materie g

1. Fall $\gamma_1 \gg 4g$

schwache Kopplung Atom + Mode

$$\rho_a(t) = e^{-\frac{4g^2}{\gamma_1} t} = e^{-\gamma_c t}$$

2. Fall $\gamma_1 \ll 4g$

starke Kopplung

$$\rho_a(t) = \frac{e^{-\gamma_1/2\, t}}{2}\left(1 + \cos 2gt\right)$$

Dämpfung

Rabi Oszillation

→ Ein Atom in einer Kavität zerfällt anders als im Vakuum (Zerfall mit $W = 2\pi \frac{\omega\mu^2}{2V\hbar 3\varepsilon_0} \frac{V\omega^2}{\pi^2 c^3} = 2\pi g^2 D(\omega)$)

$$\gamma_c = \frac{4g^2}{\gamma_1} = 4g^2 \frac{Q}{\omega}$$

$$= 2\pi g^2 D_c(\omega)$$

in der Kavität anderes Modenspektrum

$$D_c(\tilde{\omega}) = \frac{1}{\pi} \frac{\omega/2Q}{(\tilde{\omega}-\omega)^2 + \left(\frac{\omega}{2Q}\right)^2}$$

$$D_c(\omega) = \frac{2Q}{\pi\omega}$$

Zusammenfassung

(4.4.3.)

Zerfall des Atoms mit $W = 2\pi g_k^2 D(\omega)$

• Dichtematrix formalismus

$\text{Atom} \xleftrightarrow{g_k} \text{Mode} \xleftrightarrow{g_k^F} \text{Reservoir}$

Zerfall mit γ_c ODER gedämpfte Rabi Oszillationen ⟵ Atom

Atom, Mode:
• Exakt.
Rabi Osz.
Collapse & Revival

(4.4.2)

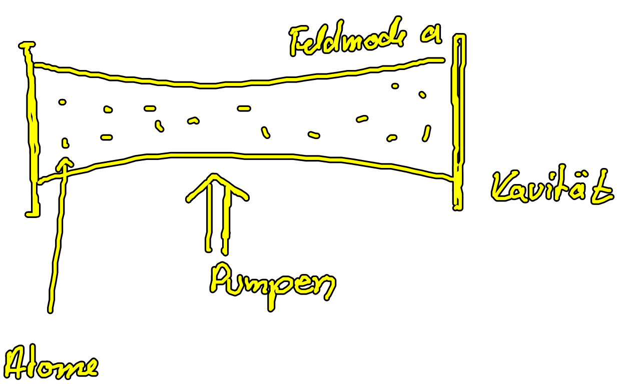
Mode, Reservoir:
• Quanten Operator Ans.
Dämpfung mit γ

$$\gamma = \frac{\omega}{Q} = 2\pi g_\omega^{F\,2} D(\omega)$$

(4.4.4.)

4.5. Laser Gleichungen

Laser: System fern vom Gleichgewicht



Index μ und Pauli-Operatoren $\sigma_\mu^+, \sigma_\mu^-, \sigma_\mu^z$

Reservoir ① R_1
Pumpmechanismus:
Kontakt mit Reservoir neg. T

Reservoir ② R_2

Vakuum Reservoir für Dämpfung der Mode in Kavität

Hamiltonian

Kohärente WW

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{FR_2} + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{AR_1} + \mathcal{H}_{AF}$$

$\mathcal{H}_A \to \frac{1}{2}\sum_\mu \hbar\omega_a \sigma_z$

$$\mathcal{H}_{AF} = \sum_\mu \hbar g \left(\sigma_\mu^+ a + a^+ \sigma_\mu^- \right)$$

RWA + Dipol Näherung

$\mathcal{H}_{FR_2}$: inkohärenter Feldanteil (Dämpfung + Rauschen)

$\mathcal{H}_{AR_1}$: Kopplung an Pump Reservoir

- Inkohärenter Anteil für Atome (Dämpfung + Rauschen)

- Dynamik durch $\mathcal{H}_F$ und $\mathcal{H}_A$ kann durch SVA abgespalten werden

$[a, H_{AF}]$

$$\dot a = -\frac{\kappa}{2} a - ig \sum_\mu \sigma_\mu^- + \hat F^a(t)$$

inkohärenter Anteil durch R_2

Atom Lebensdauer

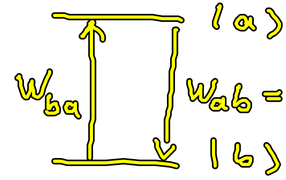
$$\tilde W = W(2\bar n_\mu + 1) = W_{ba} + W_{ab}$$

$$W = W_{ba} - W_{ab}$$

$$\dot\sigma_\mu^+ = -\frac{\tilde W}{2}\sigma_\mu^+ - i g a^+ \sigma_\mu^z + \hat F_{ab}^\mu$$

Rauschen durch R_1

$$\dot\sigma_\mu^z = \underbrace{-\tilde W \sigma_\mu^z + W}_{[\sigma^z, \mathcal{H}_{AR_1}]} + \underbrace{2ig\left(a^+\sigma_\mu^- - a\sigma_\mu^+\right)}_{[\sigma^z, \mathcal{H}_{AF}]} + \hat F_{aa}^\mu - \hat F_{bb}^\mu$$



- QM Eigenschaften des Reservoir stecken in den Rausch Operatoren

mittlere Photonenzahl in R_2

Feld:
$$\langle F^{a+}(t) F^{a}(t') \rangle = \gamma \bar{n}_{\mu}\, \delta(t-t') \qquad \hat{F}^a = -i \sum_k g_k^F b_k(0) e^{-i\omega_k t}$$
$$\langle F^{a}(t) F^{a+}(t') \rangle = \gamma (\bar{n}_{\mu}+1)\, \delta(t-t')$$

Atome:
$$\hat{F}_z^{\mu} = \hat{F}_{aa} - \hat{F}_{bb} = 2 \sum_k g_k^A b_k^A(0)\, \hat{\sigma}_{\mu}^- - 2 \sum_k g_k^A b_k^{A+} \hat{\sigma}_{\mu}^+$$

$$\hat{F}_{ab}^{\mu} = \sum_k g_k^A b_k^+ \hat{\sigma}_z \qquad \hat{=} \left(\overset{\text{für } [\sigma_-, H_{AF}]}{\dot{\sigma}_- = i g \sigma_z a} \right)$$

$$\langle \hat{F}_{ab}^{\mu}(t)\, \hat{F}_{ba}^{\mu}(t') \rangle = \sum_k \sum_{k'} g_k^A g_{k'}^A \langle b_k^+ b_k \rangle_{R_2}$$

Pump Reservoir; Photonenzahl im Mittel in R_2

$$= W (\bar{n}+1)\, \delta(t-t') = W_{ba}\, \delta(t-t')$$

$$\langle F_{ba}^{\mu}(t)\, F_{ab}^{\mu}(t') \rangle = W_{ab}\, \delta(t-t')$$

$$\langle \hat{F}_{ab}^{\mu}(t), F_z^{\mu}(t') \rangle = -2\sigma_{\mu}^- (\bar{n}+1) W \delta(t-t') = -2\sigma_{\mu}^- W_{ba}\, \delta(t-t')$$

Aufsummieren liefert Gleichungen für gesamt Polarisation $\hat{P}^- = -i \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^-$

$$\hat{P}^+ = i \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^+$$

und gesamt Inversion $\hat{D}_z = \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^z$

$$\boxed{\begin{aligned}
\dot{\hat{a}} &= \left(-i\omega - \frac{\gamma}{2}\right)\hat{a} + g\hat{P}^- + \hat{F}^a(t) \\
\dot{\hat{P}}^+ &= \left(i\omega_a - \frac{\tilde{W}}{2}\right)\hat{P}^+ + g a^+ \hat{D} + \hat{F}_{ab}(t) \\
\dot{\hat{D}} &= -\tilde{W}\hat{D} + W - 2g\left(\hat{a}^+\hat{P}^- + \hat{a}\hat{P}^+\right) + \hat{F}_z(t)
\end{aligned}}$$

$F_{ab} = \sum F_{ab}^{\mu}$

Laser Gleichungen für Atom Laser mit voll quantisiertem Licht

Übergang zur semiklassischen Beschreibung

- Mittelwertbildung $\rightarrow$ Rauschterme fallen weg

$$\langle \hat{a}^+ \sigma_z \rangle \approx \langle a \rangle \langle \sigma_z \rangle$$

$$\langle \sigma_\mu^- \hat{a}^+ \rangle \approx \langle \sigma_\mu \rangle \langle a^+ \rangle$$

$$\langle \sigma_\mu^+ a \rangle \approx \langle \sigma_\mu^+ \rangle \langle a \rangle$$