

4.5.3. Natur des Laserlichts

- Langevin Gleichung für das Feld $\tilde{\alpha}$ herleiten indem \underline{P}^- und \underline{D} adiabatisch aus Laser Gleichungen eliminiert werden aber nehmen Rauschterm mit

Laser Gl.:

$$\dot{\tilde{\alpha}} = -\frac{\gamma}{2} \tilde{\alpha} + g P^- + \frac{1}{\sqrt{V}} F^a$$

$$\dot{\tilde{P}}^+ = g \tilde{\alpha}^+ \tilde{D} - \frac{1}{2T} \tilde{P}^+ + \frac{1}{\sqrt{V}} \tilde{F}_{ab} \quad \xrightarrow{\dot{\tilde{P}}^+ = 0} 2gT \tilde{\alpha}^+ \tilde{D} + 2T \frac{1}{\sqrt{V}} \tilde{F}_{ab}$$

$$\dot{\tilde{D}} = -2g(\tilde{\alpha}^+ \tilde{P}^- + \tilde{\alpha} \tilde{P}^+) + \frac{\tilde{D}_0 - \tilde{D}}{T} \quad \xrightarrow{\dot{\tilde{D}} = 0} \tilde{D} = \frac{\tilde{D}_0}{1 + 8g^2 T^2 \tilde{\alpha}^+ \tilde{\alpha}}$$

(kein Rauschen F_{ab})

$$\Rightarrow \dot{\tilde{\alpha}} = -\frac{\gamma}{2} \tilde{\alpha} f(|\tilde{\alpha}|^2) + \frac{1}{\sqrt{V}} \tilde{F}(t) \quad (*_2)$$

$$f(|\alpha|^2) = 1 - \frac{4g^2 \cdot D_0}{\gamma \cdot \left(\frac{1}{T} + 8g^2 T \alpha^+ \alpha\right)}$$

$$f(|\alpha|^2) = 1 - \frac{C}{1 + \frac{\alpha^+ \alpha}{n_0}}$$

Neuer Rauschterm:

$$\tilde{F}(t) = F^a + 2gT \tilde{F}_{ab}$$

norm. Pumpstärke

$$C = \frac{4g^2 T D_0}{\gamma}$$

Sättigungs-
Photostärke

$$n_0 = (8g^2 T^2)^{-1}$$

wobei

$$\langle \tilde{F}^a(t) \tilde{F}^a(t') \rangle = 2Q \delta(t - t')$$

Proportionalität des Varianz

$$\Rightarrow \langle \varepsilon^*(t) \varepsilon(t') \rangle = G^{(1)} = \frac{2Q}{\gamma N} e^{-\frac{\gamma}{2} |t-t'|}$$

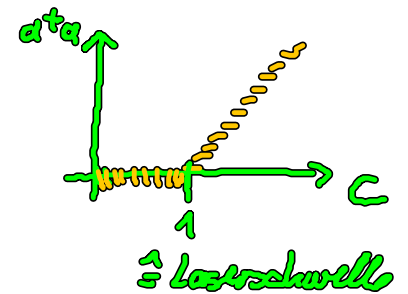
→ Eigenschaften des Lichtes
 nur bestimmt durch Rauschen
 in der Kavität
 (Photonverluste γ)

$$g^{(2)}(t) = 1 + e^{-\gamma |t|}$$

"bunching"

• thermisches Licht wie
 normale Lampe

2. Oberhalb der Schwelle $C > 1$



Vorgehen: 0. Näherung : vernachlässigen Rauschen
 α ist konstant $\rightarrow g^{(1)} = 1$
 $g^{(2)} = 1$

1. Näherung : Amplitudenrauschen vernachlässigt
 Phasenrauschen mitgenommen \rightarrow Linienbreite $g^{(1)}$

2. Näherung : Ampl. + Phasenrauschen $\rightarrow g^{(2)}$

• Zunächst Transformation von $\tilde{\alpha}$ in Polarkoordinaten

$$\tilde{\alpha} = R e^{i\phi} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{Phase} \\ \uparrow \\ \text{Amplitude} \end{array} \right.$$

$$\ln \tilde{\alpha} = \mu + i\phi \quad R = e^{\mu}$$

• Langevin Gleichung als stochastische DGL

$$(I) \quad d\tilde{\alpha} = -\frac{\mu}{2} \tilde{\alpha} f(|\tilde{\alpha}|) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} d\tilde{\Gamma}(t) \quad \text{mit} \quad d\tilde{\Gamma} d\tilde{\Gamma}^* = 2Q dt$$

$$d\tilde{\Gamma}^2 = d\tilde{\Gamma}^{*2} = 0 \quad (*)$$

Entwicklung der inf. Differenzen bis 2. Ordnung

$$d(\ln \tilde{\alpha}) = d\mu + i d\phi = \frac{d\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha}} - \underbrace{\frac{(d\tilde{\alpha})^2}{\tilde{\alpha}^2}}_{\text{verschwindet wegen } (*)}$$

$$(II) \quad d\mu + i d\phi \stackrel{!}{=} -\frac{\mu}{2} f(e^{2\mu}) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\mu - i\phi} d\tilde{\Gamma}(t)$$

• Aufspaltung in Real + Imaginärteil:

$$\Rightarrow d\mu = -\frac{\mu}{2} f(e^{2\mu}) dt + \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{N}} d\Gamma_R$$

$$d\phi = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{N}} d\Gamma_\phi$$

$$d\Gamma_R = \text{Re}(e^{-i\phi} d\tilde{\Gamma})$$

$$d\Gamma_\phi = \text{Im}(e^{-i\phi} d\tilde{\Gamma})$$

es gilt $d\Gamma_R^2 = d\Gamma_\phi^2 = Q dt$

$$d\Gamma_R d\Gamma_\phi = 0$$

Es gilt $dR = e^{\mu} d\mu + \frac{1}{2} e^{\mu} d\mu^2$ ($R = e^{\mu}$)

bis 2. Ord:

$\Rightarrow dR = \left(-\frac{\chi}{2} R f(R^2) + \frac{Q}{2NR} \right) dt + \frac{1}{\sqrt{N}} d\Gamma_R$ Amplitude

$\frac{1}{2} e^{\mu} d\Gamma_R d\Gamma_R^* \frac{e^{-3\mu}}{N}$

$d\phi = \frac{1}{R\sqrt{N}} d\Gamma_{\phi}$ Phase

Langwrt Gleichungen für Amplitude + Phase von α

1. Näherung ohne Amplitudenrauschen

Korrelationsfunktion $G^{(1)}$

$\langle \alpha^*(t) \alpha(t') \rangle$

$G^{(1)} = \langle R(t) R(t') e^{i(\phi(t') - \phi(t))} \rangle$

• steady state von $R^{ss} = \sqrt{\tilde{n}_0 (C-1)} = \sqrt{d^2 d}$

$\langle R(t) R(t') \rangle = \langle R^{ss} R^{ss} \rangle = \tilde{n}_0 (C-1)$

$G^{(1)} = \tilde{n}_0 (C-1) \langle e^{i(\phi(t') - \phi(t))} \rangle$

aus G_L folgt

$$\phi(t) - \phi(t') = \frac{1}{\sqrt{N\tilde{n}_0(L-1)}} \int_{t'}^t d\Gamma_\phi(t')$$

$$d\Gamma_\phi^2 = Q dt$$

$$\langle (\phi(t) - \phi(t'))^2 \rangle = \frac{Q |t - t'|}{N\tilde{n}_0(L-1)}$$

• aus Statistik bekannt
für gauß verteilte Werte x gilt: $\langle e^{ix} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle x^2 \rangle}$

$$\Rightarrow G^{(1)} = \langle \tilde{a}^\dagger(t) \tilde{a}(t') \rangle = \tilde{n}_0(L-1) e^{-\frac{Q|t-t'|}{2\tilde{n}_0 N(L-1)}}$$

• Phasen Korrelationszeit

$$\tau_c = \frac{2\tilde{n}_0 N(L-1)}{Q}$$

→ je mehr Atome desto schneller die Linienbreite

→ langsame Fluktuationen der Phase mit großer Amplitude

2. Näherung: Amplitudenverschieben

Linearisieren von G_L um $R^{ss} = \sqrt{\tilde{n}_0(L-1)}$

Ansatz: $R = R^{ss} + r(t)$

$$\dot{R} = \dot{r}(t) = -\frac{\gamma}{2} (R^{ss} + r(t)) \left\{ f(R^{ss}) + r \cdot \frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{R^{ss}} \right\} + \frac{Q}{2NR^{ss}} + \frac{1}{2N} \Gamma_R$$

$$f(R^{ss}) = 1 - \frac{c}{1 + \frac{R^{ss2}}{n_0}} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial R} \Big|_{R^{ss}} &= \frac{c}{\left(1 + \frac{R^2}{n_0}\right)^2} \cdot \frac{1}{n_0} 2R \Big|_{R^{ss}} \\ &= \frac{2\sqrt{c-1}}{c} \end{aligned}$$

alle Terme linear in $r(t)$

$$\dot{r}(t) = -\gamma R^{ss} \frac{\sqrt{c-1}}{c} r(t) + \frac{1}{2N} \Gamma_R$$

Ornstein Uhlenbeck Gl.

$$\rightarrow \langle r^*(t) r(t') \rangle = \frac{c}{\gamma R^{ss} \sqrt{c-1}} \frac{Q}{2N} e^{-\gamma n_0 \frac{c-1}{c} |t-t'|}$$

Korrelationsfkt: $\langle R(t) R(t') \rangle = R^{ss2} + 2 \langle R^{ss} r(t) \rangle + \langle r^*(t) r(t') \rangle$

$$G^{(2)} = \langle R(t) R(t') \rangle \cdot e^{-\frac{Q(t-t')}{2N n_0 (c-1)}}$$

$$G^{(2)} = \langle \alpha^*(t) \alpha^*(t') \alpha(t) \alpha(t') \rangle = \langle R^2(t) R^2(t') \rangle$$

$$\approx R^{ss}{}^4 + 4 R^{ss}{}^2 \langle r^2(t) r^2(t') \rangle$$

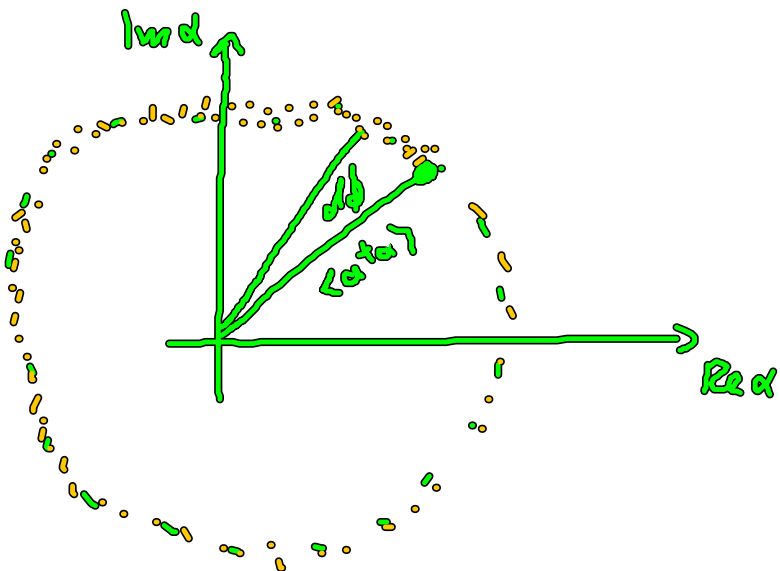
$$R = R^{ss} + r$$

$$= R^{ss}{}^2 + 2R^{ss}r + r^2$$

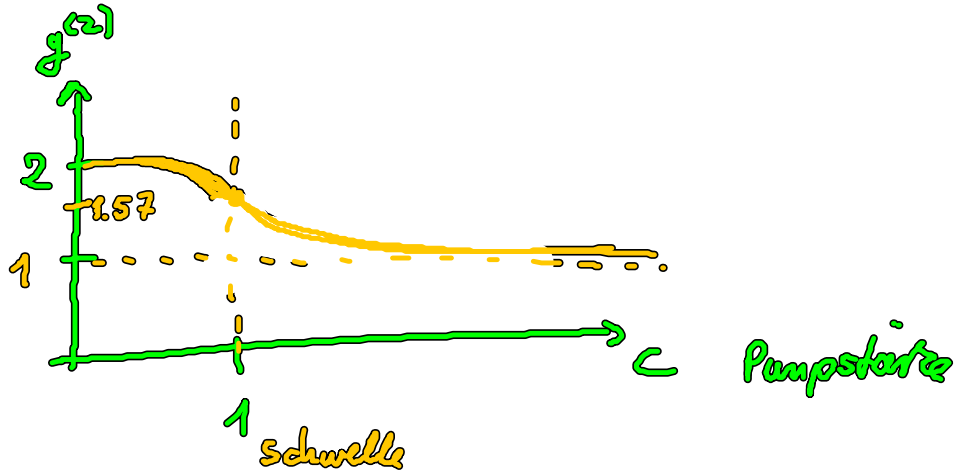
$$g^{(2)}(t) = \frac{G^{(2)}}{R^4} = 1 + \frac{1}{N} \frac{Q^2}{\gamma \bar{n}_0^2 (c-1)^2} e^{-\gamma \bar{n}_0 \frac{c-1}{c} |t|}$$

je größer N desto näher kommt
 $g^{(2)}(t)$ dem Wert der Poisson-Statistik
 nur nicht "super Poissonian"

→ schnelle Amplituden Fluktuationen
 aber kleiner Amplitude



Phase diffundiert langsam
 Intensität / Amplitude schnell



Analogie zum Phasenübergang 2. Ordnung (wie bei Ferromagn.)

Laser: Atome entwickeln Dipole im E-Feld der anderen Atome

Ferromagn.: Spin sieht Magn. Feld der anderen Spins

Laserfeld α $\hat{=}$ Ordnungsparameter

Inversion $\hat{=}$ Temperatur

Photonen $\hat{=}$ Entropie

Kollektives Phänomen
im Nichtgleichgewicht