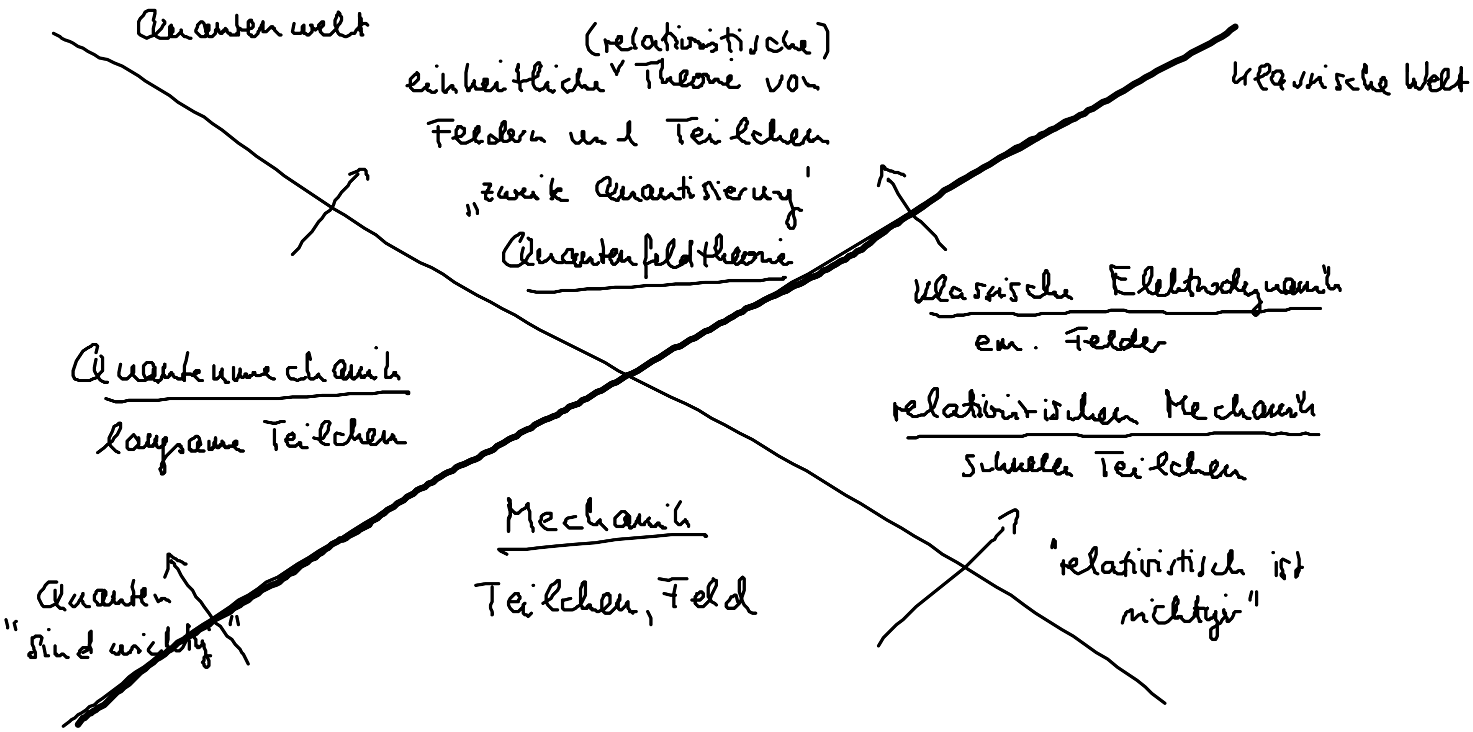
I. Wiederholung und was wir machen

I.1. Struktur der Physik



die statistische Physik als „Vielteilchenbeschreibung" befindet sich „über" der Struktur

I.2. Historische Kommentare zur Entwicklung der QM

M. Planck (1858–1947) — Schwarzkörperstrahlung, Wirkungsquantum

A. Einstein (1879–1955) — Lichtquantenhypothese

N. Bohr (1882–1962), A. Sommerfeld (1868–1958) — halbklassische Quantentheorie, Atommodelle

W. Heisenberg (1901–1976) — Matrizenmechanik, Unschärferelation, Feldquantisierung

E. Schrödinger (1887-1961) Wellenmechanik

W. Pauli (1900-1958) Spin-Statistik-Theorem

P. Dirac (1902-1984) relativistische Verallgemeinerung für spin $1/2$

abstrakte Formulierung QM

R. Feynman (1918-1988) Quantenelektrodynamik

I.3. Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

Objekt bewege sich mit Geschwindigkeit $v/c < 1$, wobei v in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c ist:

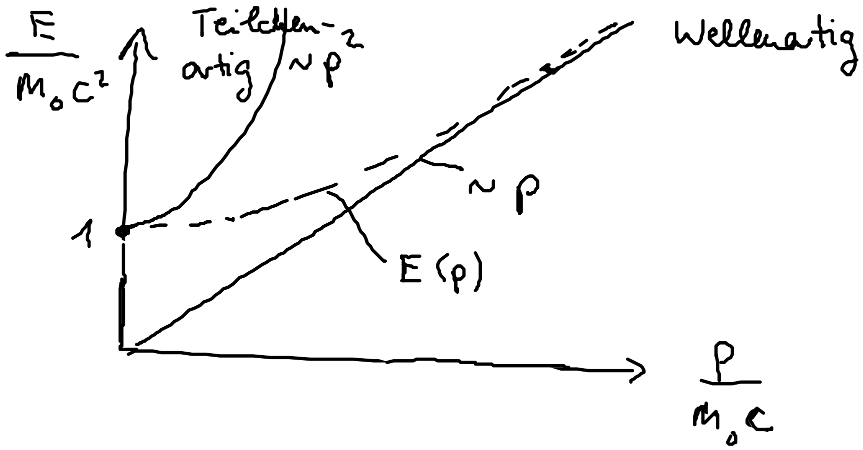
$$E(p) = \left(m_0^2 c^4 + p^2 c^2\right)^{1/2} \doteq \begin{cases} m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m} & \text{f. } p \ll m_0 c \\ p \cdot c & \text{f. } p \gg m_0 c \end{cases}$$

m_0 – Ruhemasse, p – Impuls, E – Energie

- $\frac{p^2}{2m}$ aus klassischen, nichtrelativist. Mechanik: <u>Teilchen</u>
- pc : de Broglie $p = \hbar k$, $E = \hbar\omega$

  $\longrightarrow$ $\omega = ck$: <u>Wellenanregung</u>

offensichtlich „interpoliert" $E(p)$ zwischen Teilchen und Feldern



Eine einheitliche Beschreibung von Feldern und Teilchen muss relativistisch und quantenmechanisch sein

$E(p)$ $\qquad$ $p = \hbar k,\ E = \hbar\omega$

I.4. Die beiden Bausteine: Quantenmechanik und Relativistik – eine Wiederholung

a) Axiome der Quantentheorie (Schrödinger)

1.) Zustand eines Teilchen wird durch Wellenfunktion $\psi(\vec{r},t)$ in einem linearen Vektorraum (Hilbertraum) beschrieben.

2.) Observable sind hermitesche Operatoren $\{\underline{A}\}$

3.) QM hat statistische Interpretation, Mittelwert durch

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3r\, \psi^*(\vec{r},t)\, \underline{A}\, \psi(\vec{r},t)$$ gegeben.

4.) Die Zeitentwicklung ist durch die Schrödingergleichung gegeben:

$$i\hbar\,\partial_t \psi = \underline{H}\,\psi \qquad \underline{H} \text{ – Hamilton-Operator}$$

5.) Bei einer Messung von $\underline{A}$ geht der ursprüngliche Zustand ψ in den Eigenzustand $\varphi_n(\vec{r})$ von $\underline{A}$ über, wenn a_n gemessen wird $\quad (\underline{A}\,\varphi_n = a_n\,\varphi_n)$

b) Relativistische Beschreibung

1.) Raum und Zeit werden zur Raumzeit verknüpft

$\rightarrow$ Einführung von 4-Vektoren

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z) \qquad \text{1 Ereignis}$$

kontravariant

$\mu = 0,1,2,3$ griechisch

$i = 1,2,3$ lateinisch

kovariant

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad , \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (ct, -\vec{r}) = (ct, -x, -y, -z)$$

2.) Invarianz unter Lorentztransformation zw. Inertialsystemen (IS)

3.) Eigenzeitintervall $d\tau = \frac{1}{c} ds$, $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^{\,2}$

$$= \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$$

invariant in verschiedenen IS

$\rightarrow$ Parameterdarstellung der Raumzeit

$$x^\mu(\tau) = \big(ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)\big)$$

4.) Definition des 4-Impulses als Fkt von τ:

$$p^\mu = m_0 \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau)$$

$$= \underbrace{\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} \frac{d}{dt}(ct, x, y, z)$$

$$= \big(m(t)\, c, m(t)\, \dot{x}, m(t)\, \dot{y}, m(t)\, \dot{z}\big)$$

5.) p^0 mit $\frac{E}{c}$ identifiziert $\longrightarrow \frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (*)

$\rightarrow p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$, $\vec{p} = m(t)\, \dot{\vec{r}}$

6.) Länge eines 4-Vektoren invariant unter IS-Wechsel

$$p_\mu p^\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$$

7.) $$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = \underbrace{\frac{m_0^2 c^2}{\left(\sqrt{1 - v^2/c^2}\right)^2} - (m(t)\vec{v})^2}_{m_0^2 c^2}$$

$\longrightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$

relativ. Energie-Impuls-Relation

I.5. Ausblick

- Verallgemeinerung der Schrödingergleichung auf relativistische Gleichungen, Folgerungen
- Grenzfall $\frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow$ relativistische Korrekturen, z.B. Spin-Bahn
- Einteilchentheorie: Struktur der Materie
  Näherungsmethoden
  Feld-Materie WW
  Streutheorie
- Vielteilchentheorie: Wechselwirkende Teilchen, z.B. Elektronengas
- Quantenfeldtheorie // fundamentale WW (?)

II. Relativistische Wellengleichungen

Schrödingergleichung ist nichtrelativistisch

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

1. Ordnung

2 Mögl.

2. Ordnung $\longrightarrow$ Raum und Zeit unfair behandelt

weitere Zeitableitung

$\downarrow$

Klein-Gordon-Gl. (Spin 0)

Weglassen einer Ortsableitung

$\downarrow$

Dirac-Gleichung (Spin $1/2$)

II.1. Die Klein-Gordon-Gleichung

II.1.1. „Herleitung"

Schrödingergleichung aus $E = \frac{p^2}{2m}$ mit $E \to i\hbar\partial_t$, $\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla$

$$\longrightarrow \quad i\hbar\partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

wir nehmen: $E^2(p) = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

$$\longrightarrow \quad -\hbar^2 \partial_t^2 \psi = \left(-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4\right)\psi$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0$$

$$\boxed{\left(\Box + \frac{1}{\lambda_c^2}\right)\psi = 0} \qquad \lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c} \quad \text{Compton-Wellenlänge}$$

Klein-Gordon-Gleichung
für ein relativistisches Teilchen
(welches? $\to$ später!),
Standard-Gleichung mit Masseterm

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \left(\partial_{ct}, \partial_x, \partial_y, \partial_z\right) \cdot \left(\partial_{ct}, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z\right)$$

II.1.2. Kontinuitätsgleichung der K-G-Gleichung

vgl. Schrödingergleichung:

$\rho = |\psi|^2$ Wahrscheinlichkeitsdichte

$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right)$ Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\longrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

→ Schrödingertheorie als statistische Theorie die Wahrscheinlichkeitsaussagen macht

Klein-Gordon ?

Herleitung → Tutorium

$$\longrightarrow \nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2m_0 i}\left(\psi^* \nabla\psi - \psi \nabla \psi^*\right)$$

ρ kann in der K-G-Theorie nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, weil $\rho, \dot{\rho}$ zu festem Zeitpunkt unabhängig gewählt werden können, daher $\rho < 0$ → Problem!

<u>Idee</u>: Ladungsdichteinterpretation → später!