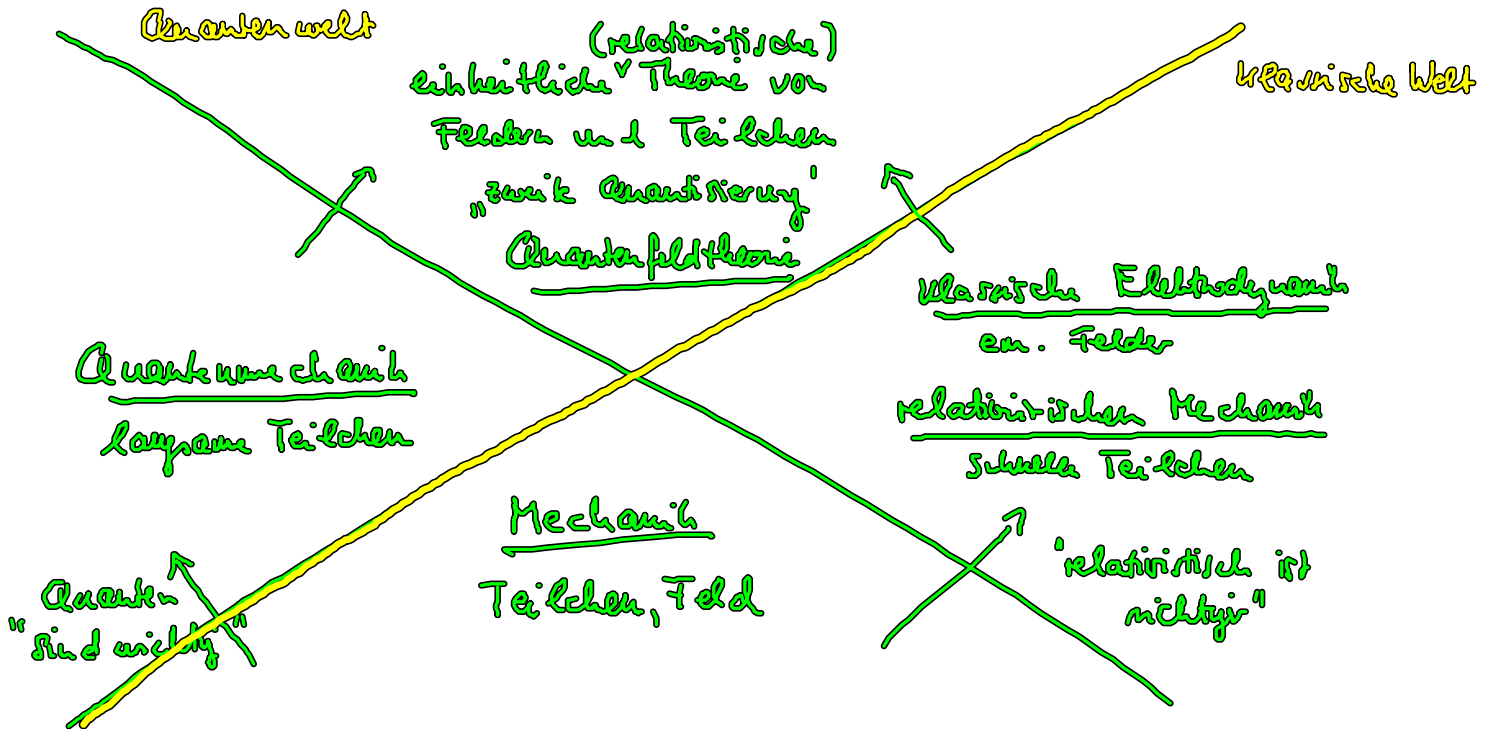


I. Wiederholung und was wir machen

I.1. Struktur der Physik



die statistische Physik als "Vielteilchenbeschreibung" befindet sich "über" der Struktur

I.2. Historische Kommentare zur Entwicklung der QM

M. Planck (1858-1947)	Schwarzkörperstrahlung Wirkungsquantum
A. Einstein (1879-1955)	Lichtquantenhypothese
N. Bohr (1882-1962)	} halbklassische Quantentheorie, Atommodelle
A. Sommerfeld (1868-1958)	
W. Heisenberg (1901-1976)	Matrixmechanik Unschärferelation Feldquantisierung

E. Schrödinger (1887-1961)

Wellenmechanik

W. Pauli (1900-1958)

Spin-Statistik-Theorem

P. Dirac (1902-1984)

relativistische Verallgemeinerung für spin $\frac{1}{2}$

abstrakte Formulierung QM

R. Feynman (1918-1988)

Quantenelektrodynamik

I.3. Relativistische Energi-Impuls-Beziehung

Objekt bewege sich mit Geschwindigkeit $v/c < 1$, wobei v in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c ist:

$$E(p) = (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2} \approx \begin{cases} m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m} & \text{f. } p \ll m_0 c \\ p \cdot c & \text{f. } p \gg m_0 c \end{cases}$$

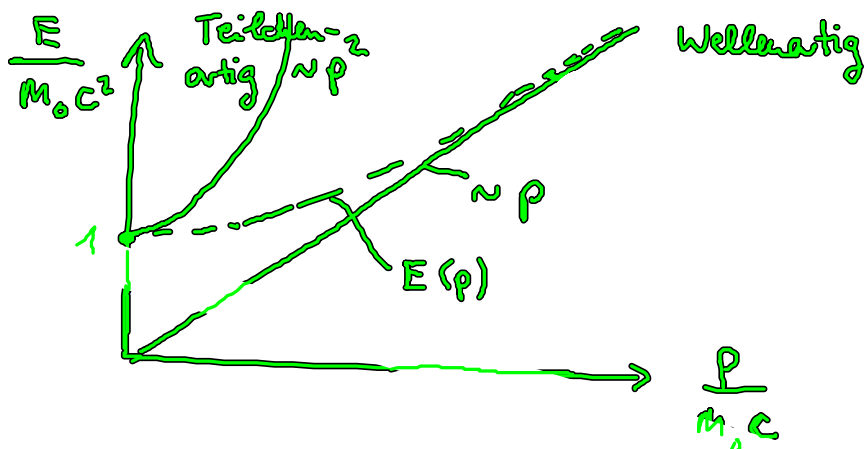
m_0 - Ruhemasse, p - Impuls, E - Energie

• $\frac{p^2}{2m}$ aus klassischer, nichtrelativ. Mechanik: Teilchen

• $p \cdot c$: de Broglie $p = \hbar k$, $E = \hbar \omega$

→ $\omega = ck$: Wellenanzug

offensichtlich „interpoliert“ $E(p)$ zwischen Teilchen und Feldern



Eine einheitliche Beschreibung von Feldern und Teilchen muss relativistisch und quantenmechanisch sein

$$E(p)$$

$$p = \hbar k, E = \hbar \omega$$

I.4. Die beiden Bausteine: Quantenmechanik und Relativität - eine Wiederholung

a) Axiome der Quantentheorie (Schrödinger)

1) Zustand eines Teilchen wird durch Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t)$ in einem linearen Vektorraum (Hilbertraum) beschrieben.

2) Observable sind hermitesche Operatoren $\{A\}$

3) QM hat statistische Interpretation, Mittelwert durch

$$\langle \underline{A} \rangle = \int d^3r \Psi^*(\vec{r}, t) \underline{A} \Psi(\vec{r}, t) \text{ gegeben.}$$

4) Die Zeitentwicklung ist durch die Schrödingergleichung gegeben:

$$i\hbar \partial_t \Psi = \underline{H} \Psi \quad \underline{H} - \text{Hamilton-Operator}$$

5) Bei einer Messung von \underline{A} geht der ursprüngliche Zustand Ψ in den Eigenzustand $\Psi_n(\vec{r})$ von \underline{A} über, wenn an gemessen wird ($\underline{A} \Psi_n = a_n \Psi_n$)

b) Relativistische Beschreibung

1) Raum und Zeit werden zur Raumzeit verknüpft

→ Einführung von 4-Vektoren

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z) \quad \uparrow \text{ Ereignis}$$

Kovariant

$\mu = 0, 1, 2, 3$ griechisch
 $i = 1, 2, 3$ lateinisch

invariant

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (ct, -\vec{r}) = (ct, x, y, z)$$

2.) Invarianz unter Lorentztransformation zw. Inertialsystemen (IS)

3.) Eigenzeitintervall $d\tau = \frac{1}{c} ds, \quad ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$$

invariant in verschiedenen IS

→ Parameterdarstellung der Raumzeit

$$x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

4.) Definition des 4-Impulses als Fkt von τ :

$$p^\mu = m_0 \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau)$$

$$= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} (ct, x, y, z)$$

$$= (m(t)c, m(t)\dot{x}, m(t)\dot{y}, m(t)\dot{z})$$

5.) p^0 mit $\frac{E}{c}$ identifiziert $\rightarrow \frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ Ⓢ

$$\rightarrow p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right), \quad \vec{p} = m(t)\vec{v}$$

6.) Länge eines 4-Vektors invariant unter IS-Wechsel

$$p_\mu p^\mu = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$$

7.)

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}^2 = \frac{m_0^2 c^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2} - (m(t)\vec{v})^2$$

$$= m_0^2 c^2$$

$$\rightarrow \boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

relativ. Energi-Impuls-Relation

I. 5. Ausblick

- Verallgemeinerung der Schrödingergleichung auf relativistische Gleichungen, Folgerungen
- Grenzfall $\frac{v}{c} \ll 1 \rightarrow$ relativistische Korrekturen, z.B. Spin-Bahn
- Einteilchentheorie: Struktur der Materie
 - Näherungsmethoden
 - Feld-Materie WW
 - Streuung
- Vielteilchentheorie: Wechselwirkende Teilchen, z.B. Elektronen
- Quantenfeldtheorie // fundamentale WW (?)

II. Relativistische Wellengleichungen

Schrödingergleichung ist nichtrelativistisch

$$i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

1. Ordnung

2. Ordnung

Raum und Zeit
unfair behandelt

2 Mögl.



weitere
Zeit ableitung



Klein-Gordon-Gl.
(Spin 0)

Weglassen ein
Orts ableitung



Dirac-Gleichung
(Spin 1/2)

II.1. Die Klein-Gordon-Gleichung

II.1.1. „Herleitung“

Schwingungsgleichung aus $E = \frac{p^2}{2m}$ mit $E \rightarrow i\hbar \partial_t$, $\vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$

$$\rightarrow i\hbar \partial_t \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi$$

wir nehmen: $E^2(p) = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$

$$\rightarrow -\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \psi$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0$$

$$\boxed{\left(\square + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \psi = 0} \quad \lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c} \quad \text{Compton-Wellenlänge}$$

Klein-Gordon-Gleichung
für ein relativistisches Teilchen
(welcher? → später!),
Standard-Gleichung mit Momen

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_{ct}, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\partial_{ct}, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$$

II.1.2. Kontinuitätsgleichung der K-G-Gleichung

vgl. Schwingungsgleichung:

$$\rho = |\psi|^2 \quad \text{Wahrscheinlichkeitsdichte}$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad \text{Wahrscheinlichkeitsstromdichte}$$

$$\rightarrow \nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

→ Schrödingertheorie als statistische Theorie die Wahrscheinlichkeitsmenge macht

Klein-Gordon?

Herleitung → Tutorium

$$\rightarrow \nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2} (\Psi^* \partial_t \Psi - \Psi \partial_t \Psi^*)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

ρ kann in der KG-Theorie nicht als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, weil ρ, \vec{j} zu festen Zeitpunkten unabhängig gewählt werden können, dass $\rho < 0 \rightarrow$ Problem!

Idee: Ladungsdichteinterpretation \rightarrow später!