2. Die Diracgleichung für freie Teilchen

- relativistische Formulierung der Quantenmechanik
- erster Versuch: Klein Gordon - Gleichung mit
  2. Zeit- und Ortsableitungen

Nachteil: a) kein Spin → Spin Null interpretiert

b) Ladungsdichteinterpretation für Mesonen erst nach ihrer Entdeckung

- Raum und Zeit können auch innerhalb erster Ableitungen symmetrisch behandelt werden, Randbedingungen: nichtrelativistischer Grenzfall okay, Energie-Impuls-Beziehung

$$\underbrace{i\hbar\,\partial_t \psi}_{\text{aus Schrödingergl. übernommen}} = \Big[c\,\alpha^k \underbrace{\tfrac{\hbar}{i}\partial_k}_{\text{k-te Orts-koordinate}} + \underbrace{\beta\, m_0 c^2}_{\text{stellt später die relativistische Energie-Impuls Beziehung}} \Big]\psi$$

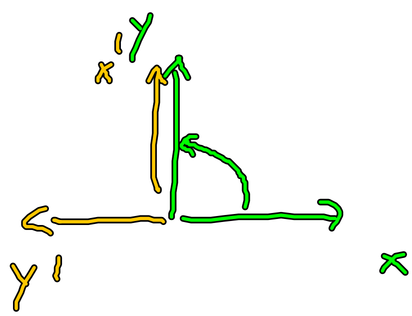
$\frac{\hbar}{i}\partial_k = p_k$

α^k sind Koeffizienten, die sind zu bestimmen aus diesem Ansatz

Einstein-Summenkonvention $\left(\sum_k\right)$

einfachste vorstellbare Wellengleichung in ersten Ableitungen.

erstes Problem: beim Weiterrechnen stellt man fest, daß α^k keine Zahl sein kann, einfachstes Argument dazu zu sehen ist, daß eine Drehung des KS eine andere Gleichung hervorbringt $\rightarrow$ darf nicht sein



$\Rightarrow$ Umrechnen der Ableitungen gibt neue Vorzeichen $\quad y = x'$, $x = -y'$.

2.1. Bestimmung der Dirac-Koeffizienten

Matrix

Dirac nimmt $N \times N$ hermitische Matrizen für $\hat{\alpha}^k$, $\hat{\beta}$ an.

$\Rightarrow$ Konsequenz $\quad \hat{\psi} \cong$ Matrix $\psi \Rightarrow \psi \rightarrow \bar{\psi}$

Diracgleichung ist eine Gleichung für vektorwertige Wellenfunktion $\bar{\psi}$.

„N-dimensionaler Spinor", weil die vektorwertige Fkt. über (4)

Spinlage des Teilchens interpretiert wird

$$i\hbar\partial_t\vec{\psi} = \left(c\,\hat{\alpha}^k p_k + \hat{\beta} m_0 c^2\right)\vec{\psi}\,, \quad \vec{\psi} = \vec{\psi}(\vec{r},t)$$

soll alte Energie-Impuls-Beziehung liefern:

man bestimmt $\hat{\alpha}^k$, $\hat{\beta}$, so daß diese gilt $\longrightarrow$

dazu Diracgleichung 2x anwenden:

$$+i\hbar\partial_t\vec{\psi} \xrightarrow[i\hbar\partial_t]{} -\hbar^2\partial_t^2\vec{\psi} = \left(c\hat{\alpha}^\ell\frac{\hbar}{i}\partial_\ell + \hat{\beta}m_0c^2\right)\left(c\hat{\alpha}^k\frac{\hbar}{i}\partial_k + \hat{\beta}m_0c^2\right)\vec{\psi}$$

$$-\partial_t^2\vec{\psi} = \underbrace{-\frac{c^2}{2}\left(\hat{\alpha}^\ell\hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k\hat{\alpha}^\ell\right)}_{\text{symmetrisierte Variante der Matrizenmultiplikation weil } \hat{\alpha}^\ell, \hat{\alpha}^k \text{ nicht vertauschen müssen.}}\partial_\ell\partial_k\vec{\psi}$$

die 2 kompensiert die Doppelzählung bei Symmetrisieren

$$+\frac{c}{\hbar i}m_0c^2\left(\hat{\alpha}^\ell\partial_\ell\hat{\beta} + \hat{\beta}\hat{\alpha}^k\partial_k\right)\vec{\psi}$$

$$+\left(\frac{\hat{\beta}^2 m_0^2 c^4}{\hbar^2}\right)\vec{\psi}$$

zweimalige Ableitung zu einer Klein-Gordon artigen Gleichg.

die $E = \hat{E}(p)$ erfüllt.

$$\hat{\alpha}^l \partial_l \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \partial_k = \left(\hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k \right) \partial_k$$

wähle die Koeffizienten in der Gleichung für $\vec{\psi}$, so daß

Kl-Go-Gl. erfüllt ist:

1) $\hat{\alpha}^l \hat{\alpha}^k + \hat{\alpha}^k \hat{\alpha}^l = 2 \delta_{kl} \hat{I}$

2) $\hat{\alpha}^k \hat{\beta} + \hat{\beta} \hat{\alpha}^k = \hat{0}$

3) $\hat{\beta}^2 = \hat{I} \quad \left(\hat{\beta} = \hat{\beta}^{-1} \right)$

$$\Longrightarrow \quad -\partial_t^2 \vec{\psi} = -c^2 \partial_k \partial^k \vec{\psi} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \vec{\psi}$$

$\hat{=}$ Kl-Go-Gl.

gibt es denn $\hat{\alpha}^k, \hat{\beta}$ die (1-3) erfüllen?

Matrizenwahl kann folgendermaßen motiviert werden:

und (3)

a) $$sp(\hat{\alpha}^k) \underset{\text{nach (2)}}{=} -sp(\hat{\beta}\,\hat{\alpha}^k\,\hat{\beta}) = -sp(\hat{\beta}^2 \alpha_k) = -sp(\hat{\alpha}^k)$$

Summe der Eigenwerte (Spur) muß Null sein

b) weil $(\hat{\alpha}^k)^2 = \hat{1}$ ist (nach (1))

muß $\hat{\alpha}^k$ die Eigenwerte ± 1 besitzen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{\alpha_2}} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{\alpha_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underline{\underline{1}} \end{pmatrix}$$

c) a+b $\Rightarrow$ es muß die gleiche Zahl von ± 1 auf der Diagonale stehen, N muß gerade sein.

N = 2 geht nicht! (probiere selbst)

N = 4 probieren: eine mögliche Wahl ist:

$$\hat{\alpha}^k = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{\sigma}^k \\ \hat{\sigma}^k & \hat{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(x - Komponente) (y- Komponente) (z- Komponente)

$\longrightarrow$ Matrixvektor $\vec{\hat{\alpha}} = (\hat{\alpha}^1, \hat{\alpha}^2, \hat{\alpha}^3)$

$\longrightarrow$ damit ist die Diracgleichg. konstruiert!

$$i\hbar\,\partial_t \vec{\psi} = (c\,\hat{\alpha}^k p_k + \hat{\beta}\, m_0 c^2)\,\vec{\psi}$$

α, β sind bekannt

2.2. Die Diracgleichg. in kovarianter Schreibweise

Raum und Zeit ähnlich schreiben $\partial_t \to \partial_0$, $x_0 = ct$

multipliziere Diracgl. mit $\frac{\hat{\beta}}{c}$

$$\left[-i\left(\hat{\beta}\,\partial_0 + \hat{\beta}\,\hat{\alpha}^i \partial_i\right) + \frac{m_0 c}{\hbar}\hat{1}\right]\vec{\psi} = 0$$

Einführung von $\vec{\gamma} = (\hat{\beta}, \hat{\beta}\hat{\alpha}^1, \hat{\beta}\hat{\alpha}^2, \hat{\beta}\hat{\alpha}^3)$

$$\left(-i\,\underbrace{\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu} + \frac{mc}{\hbar}\hat{1}\right)\vec{\psi} = 0$$

$$\boxed{\left(-i\,\not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\hat{1}\right)\vec{\psi} = 0}$$

$\not{\partial}$ ist die Def. der „Kovariante Ableitung" $\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu$

2.3. Die Diracglg. erfüllt eine Kontinuitätsglg. mit Wahrscheinlichkeitsdichte interpretation

Skizze: $i\hbar\,\partial_t \vec{\psi} = \dots \quad | \; \vec{\psi}^+ \cdot$

$-i\hbar\,\partial_t \vec{\psi}^+ = \dots \quad | \; \cdot \vec{\psi}$

Summe bilden

$$+i\hbar\,\partial_t\left(\vec{\psi}^+ \psi\right) = \frac{\hbar}{i}\,\partial_k\left(c\,\vec{\psi}^+ \hat{\alpha}^k \psi\right)$$

$\Rightarrow$ Kontinuitäts-glg.
$$\partial_t\left(\psi^+\psi\right) = -\partial_k j^k = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

$$j_k = c\,\vec{\psi}^+ \hat{\alpha}^k \vec{\psi}$$

$$\psi^+\psi = \underbrace{|\psi_1|^2 + |\psi_2| + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2}$$

positiv → Wgl. der Wahrscheinlichkeitsdichteinterpretation

2.4. Ebene Wellen als Lösungen: Konstruktion

Schrödingergl.: $\psi = \psi_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \sim e^{i\frac{\vec{p}}{\hbar}\vec{r}}$

analoger Versuch f. Diracgleichg.:

$$\vec{\psi}(\vec{r},t) = \underbrace{\left(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0, \psi_4^0\right)}_{f(E,\vec{p})} \underbrace{e^{-i\frac{E}{\hbar}t + i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}}_{\text{Fourieransatz}}$$

$$\vec{\psi}(\vec{r},t) = \left(\vec{\psi}_1^0, \vec{\psi}_2^0\right) e^{-i(\dots)}$$

$$\left(\psi_1^0, \psi_2^0\right) \qquad \left(\psi_3^0, \psi_4^0\right)$$

In die Diracgleichg. einsetzen:

$$\left(-i\hat{\gamma}^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\hat{1}\right)\vec{\psi} = 0$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^\mu = \begin{pmatrix} \hat{O} & \hat{G}^\mu \\ -\hat{G}^\mu & \hat{O} \end{pmatrix}$$

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1\\ -\vec{\varphi}_2\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\hat{0} & \vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\\ -\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p} & \hat{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1\\ \vec{\varphi}_2\end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1\\ \vec{\varphi}_2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} E\,\vec{\varphi}_1 &= c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\,\vec{\varphi}_2 + mc^2\,\vec{\varphi}_1\\ E\,\vec{\varphi}_2 &= c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}\,\vec{\varphi}_1 - mc^2\,\vec{\varphi}_2\end{aligned}\right\}$$ Matrix ausgeschrieben

linear. Gleichungssystem, Koeffizientendeterminante muß verschwinden

$\rightarrow$ Gleichg. $E = \pm c\,(p^2 + m_0^2 c^2)^{1/2}$

2 mögl. Energiezweige $E_\lambda = \pm c\,(p^2 + m_0^2c^2)^{1/2}$

$\lambda = \pm$

mit derselben Methode wie Kl-Go Gl. kann man zeigen, daß beide E-Zweige ernst zu nehmen sind ?

$$\vec{\varphi}_2 = \frac{c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + m_0c^2}\,\vec{\varphi}_1 \quad , \quad E_\lambda = E_\lambda(\vec{p})$$

$$\vec{\psi}_{p\lambda}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix}\vec{\varphi}_1\\ \dfrac{c\,\vec{\hat{\sigma}}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + mc^2}\,\vec{\varphi}_1\end{pmatrix} e^{-i\left(\frac{E_\lambda(p)}{\hbar}t - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)}$$

ebene Welle Lösg., vektorartig, $\vec{\varphi}_1$ ist noch unbestimmt

a) $\vec{\psi}$ soll normiert sein (Wahrscheinlichkeitsdichte interpretation)

b) $\vec{\varphi}_1$ ist ein Zweiervektor, Basis $(1,0)$, $(0,1)$

$\Rightarrow$

$$\vec{\psi}_{p,\lambda,m_s} = \text{Normierg.} \begin{pmatrix} \vec{\chi}_{m_s} \\ \dfrac{c\,\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E_\lambda + m_0 c^2}\,\vec{\chi}_{m_s} \end{pmatrix} \underbrace{e^{-i\left(\frac{E_\lambda \cdot t}{\hbar} - \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right)}}_{\text{ebene Welle mit der relativist. } E_\lambda = E_\lambda(p)}$$

zweikomponentiger Vektor
„Fourieramplitude",
wobei $\vec{\chi}_{m_s} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\exists$ 2 Werte für m_s

m_s muß bestimmt werden als eine Quantenzahl die Lösg beschreibt.