

Bosonen: $[a_\lambda, a_\lambda^\dagger]_- = 1, [a_\lambda^{(+)}, a_\lambda^{(+)}] = 0$

mit Hilfe dieser Vertauschungsrelationen läßt sich analog zum Vorgehen bei Fermionen das Eigenwertproblem

$$a_\lambda^\dagger a_\lambda |u_\lambda\rangle = u_\lambda |u_\lambda\rangle \text{ lösen (QM1 - Oszillator in Leiterdarstellung)}$$

Für Bosonen gilt:

- Quantenzahl $u_\lambda \in (0, 1, 2, 3, \dots)$
d.h. u_λ "Quanten" im Zustand $|u_\lambda\rangle$
- Zustände: $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$

$$|u_\lambda\rangle = \left(\sqrt{u_\lambda!}\right)^{-1} \left(a_\lambda^\dagger\right)^{u_\lambda} |0\rangle$$

↑
Vakuumzustand mit 0 Teilchen

Erinnerung an QM1: Interpretation Leiteroperatoren

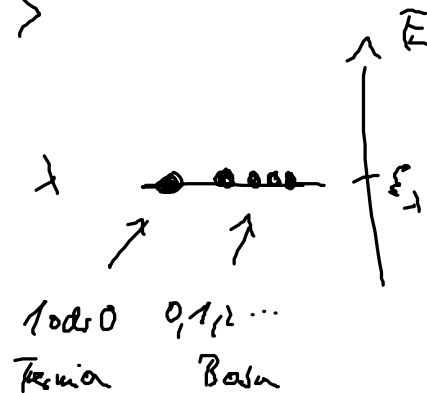
Sprachweise: a_λ^\dagger erzeugt ein Quant in Mode λ
 a_λ vernichtet ein Quant in Mode λ

→ damit ist das Eigenwertproblem für 1 Modus für Fermionen und Bosonen gelöst.

$$\underline{H} |u_\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda u_\lambda |u_\lambda\rangle$$

⏟

Energie in Modus λ



Übergang zu vielen Moden:

$$\underline{H} = \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda}$$

↑
un

unabhängige Oszillatoren

↙
Produktzustände
 $\hat{E} \hat{=} \text{Summe}$

$$|u_1, u_2, u_3, \dots\rangle = \prod_{\lambda} |u_{\lambda}\rangle = |u_1\rangle |u_2\rangle \dots$$

$$E_N = \sum_{\lambda} u_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}$$

↑
wieviel Teilchen

$|u_1, u_2, u_3, \dots\rangle$ bildet ein vollständiges System im Raum aller Moden λ

$$|\varphi_N\rangle = \sum_{u_1} \sum_{u_2} \dots C_{u_1 u_2 \dots} |u_1, u_2, \dots\rangle$$

beliebige Zustände, Teilchenzahl N

Das gilt f. System wechselwirkungsfrei Teilchen, denn die Schrödinger gl. aus im externen Potential, dann WW quantisiert.

Interpretation φ^\dagger :

$$|\varphi_N\rangle = \sum_{\{u_\lambda\}} C_{\{u_\lambda\}} \prod_{\lambda} \frac{(a_{-\lambda}^\dagger)^{u_\lambda}}{\sqrt{u_\lambda!}} |0\rangle$$

\uparrow
 $|0_1\rangle |0_2\rangle |0_3\rangle \dots$

$$a_{-\lambda}^\dagger = \int d^3r u_\lambda(\vec{r}) \underline{\varphi}^\dagger(\vec{r}, t)$$

$$\text{(aus } \underline{\varphi}^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_{-\lambda} a_{-\lambda}^\dagger(t) u_\lambda(\vec{r})$$

Interpretation: Am Ort \vec{r} zu Zeit t erzeugt $\underline{\varphi}^\dagger$ ein Teilchen auf dem Vakuum

\rightarrow „Hülsenberg Erzeugung $(\underline{\varphi}^\dagger)$ “

und Verküpfung (F) Operatoren.

um zwei System verschieden Teilchen Zahl zu wechseln
braucht man

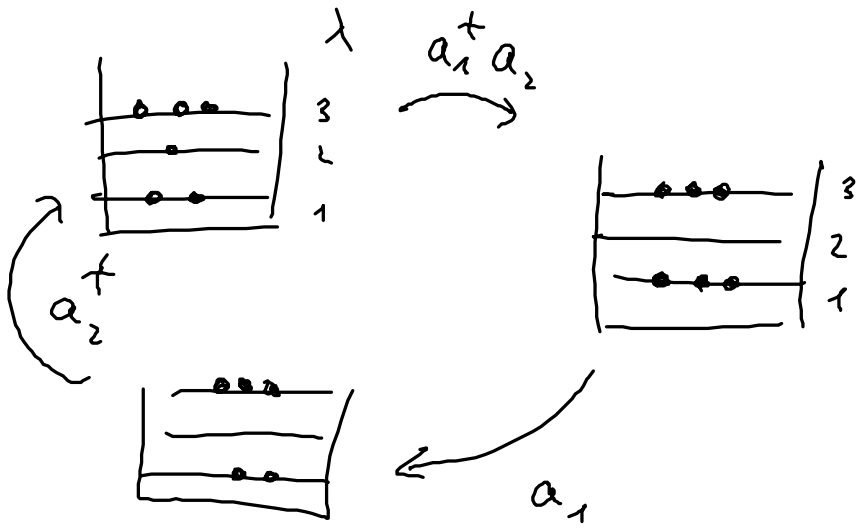
$$\frac{a_{-\lambda}^{\dagger}}{\sqrt{\lambda}} |u_1, u_2, \dots, \underline{u_{\lambda}}, \dots\rangle = \begin{cases} (u_{\lambda} + 1)^{1/2} |u_1, u_2, \dots, \underline{u_{\lambda} + 1}, \dots\rangle \\ (-1)^m (1 - u_{\lambda})^{1/2} |u_1, u_2, \dots, \underline{1 - u_{\lambda}}, \dots\rangle \end{cases}$$

↑
 Vormitg.
 B
 F

$$\frac{a_{-\lambda}}{\sqrt{\lambda}} |u_1, u_2, \dots, \underline{u_{\lambda}}, \dots\rangle = \begin{cases} \sqrt{u_{\lambda}} |u_1, u_2, \dots, \underline{u_{\lambda} - 1}, \dots\rangle \\ (-1)^m \sqrt{u_{\lambda}} |u_1, u_2, \dots, \underline{1 - u_{\lambda}}, \dots\rangle \end{cases}$$

$$m = \sum_{i=1}^{\lambda-1} u_i$$

↑
kommt bei der
Herleitg. der Kommutator-
relationen.



Theorie die mit
 Hilbertraum
 variabler Teilchenzahl
 arbeitet,
 ist eine Vielteilchentheorie

2. Wechselwirkendes Quantenfelds: Elektron-Elektron WW

- behandelt jetzt elektronische System (viel e^-) im Kernpotential (externes Potential U_{ext}) + die über das Maxwellfeld bzw. mittels WW (Coulomb WW \rightarrow Skalarpotential ϕ)
- $\vec{A} \rightarrow 0$, d.h. Strahlungskorrekturen weglassen (Coulombbeitrag genügt, weil einfachere ϕ)

2.1. Lagrangefunktion

Energie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - U_{\text{ken}} \underbrace{\psi^* \psi}_{\text{Dichte des Elektron}} - q \underbrace{\phi_{\text{el}}}_{\text{Dichte}} \psi^* \psi + \frac{1}{2} \sum_i \epsilon_0 \left(\partial_i \phi_{\text{el}} \right)^2$$

\mathcal{L}_0 Elektron System ohne WW (leht VL) kinetische Energie
 U_{ken} leht VL
 $q \phi_{\text{el}}$ leht VL
 $\frac{1}{2} \sum_i \epsilon_0 (\partial_i \phi_{\text{el}})^2$ E des Maxwellfelds

$$U_{\text{ken}} = q \phi_{\text{ken}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{Elektronladg.}$$

Wissen: $\Delta \phi_{\text{el}} = - \frac{\rho_{\text{el}}}{\epsilon_0} = - \frac{q \psi^* \psi}{\epsilon_0}$

Gleichung f. Skalarpotential aus Elektrodynamik oder aus \mathcal{L} herleiten

aus den Termen:

$$+ \frac{\epsilon_0}{2} \sum_i (\partial_i \phi_{\text{el}})^2 = - \frac{\epsilon_0}{2} \sum_i \phi_{\text{el}} \partial_i^2 \phi_{\text{el}}$$

$L \sim \int d^3r$
 partielle Integration,
 Ränder wie üblich $\rightarrow 0$
 Poisson-Gl. $\hat{=} \Delta \phi_{\text{el}}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - q \phi_{\text{ken}} \psi^* \psi - \underbrace{\frac{q}{2} \psi^* \phi_{\text{el}} \psi}$$

symmetrisiert, um Problem bei
Antisymmetrie zu umgehen

$$\frac{q^2}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \frac{\psi^*(\vec{r}') \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}') \psi(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(Lsg. d. Poissongl. verwendet)

2.2. Hamiltonian

$$\underline{H} = \int d^3r \underline{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U_{\text{ken}}(\vec{r}) \right) \underline{\psi}(\vec{r})$$

Elektronfeld mit kinetischer Energie + Kernpotential

$$+ \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\underline{\psi}^\dagger(\vec{r}) \underline{\psi}^\dagger(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r}') \underline{\psi}(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

berühndst
Doppel-
Zählg.

Coulomb law als Elektrostatik best. und sich selbst

(1) (2)
Übersetzung vord. v. 1. zu 2. Quantisierung.

Einteiloperator: $\hat{O}(\vec{r}_i)$ Teilkoordinaten

$$H_{kin}^{(1)} = \sum_i -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \rightarrow H_{kin}^{(2)} = \int d^3r \psi^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \psi(\vec{r}, t)$$

↑
↑
 alle Elektronen Quantenfeld

Zweiteiloperator

$$H_{Coul}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \rightarrow H_{Coul}^{(2)} = \int d^3r \int d^3r' \frac{\psi^\dagger(\vec{r}, t) \psi^\dagger(\vec{r}', t) \psi(\vec{r}) \psi(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

↑↑
2 Koordinaten
2 Teiloperator

$$H^{(1)} = \sum_i \underline{0}_i \rightarrow \sum_S \int d^3r \sum_{-s}^+ \psi(\vec{r}, t) \underline{0}(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

$$H^{(1)} = \sum_{ij} \underline{0}_{ij} \rightarrow \sum_{S, S'} \int d^3r \int d^3r' \sum_{-s}^+ \psi(\vec{r}, t) \sum_{-s'}^+ \psi(\vec{r}', t) \underline{0}(\vec{r}, \vec{r}') \sum_{-s'}^+ \psi(\vec{r}', t) \sum_{-s}^+ \psi(\vec{r}, t)$$

Einfüg. d. Spins über Einweg. an Dirac vektor, wo

Belang die Dichteinterpretation hatte

$$S = u_s = \pm \frac{1}{2} \text{ für 2er Spinor der Pauli-Physik.}$$

$u_u(r)$ was das früher

Modentwicklung:

$$\psi_{-s}(\vec{r}, t) = \sum_u \varphi_u(r) a_{us}(t)$$

$$\psi_{-s}^+(\vec{r}, t) = \sum_u \varphi_u^*(r) a_{us}^+(t)$$

Einsetzen in H: $\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{\text{Coulomb}}$

$$\underline{H}_0 = \sum_S \int d^3r \sum_{u_1 u_2} \varphi_{u_1}^*(r) \left(-\frac{\hbar^2 \Delta}{2m} + U_{\text{kin}} \right) \varphi_{u_2}(r) a_{u_1 s}^+ a_{u_2 s}$$

$E_{u_2} \varphi_{u_2}(r)$ bekannt

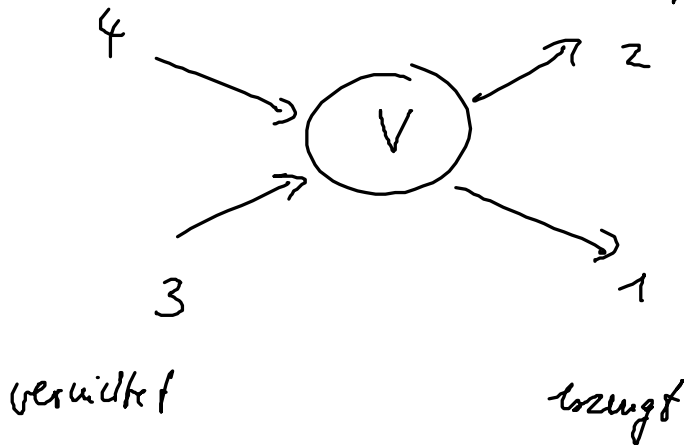
$$= \sum_S \sum_u E_u a_{us}^+ a_{us}$$

$$H_{\text{cont}} = \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \sum_{\substack{u_1 \dots u_4 \\ S, S'}} \frac{\overbrace{\varphi_{u_1}^*(\vec{r}) \varphi_{u_2}^*(\vec{r}') \varphi_{u_3}(\vec{r}') \varphi_{u_4}(\vec{r})}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$a_{u_1 S}^\dagger a_{u_2 S'}^\dagger a_{u_3 S'} a_{u_4 S}$$

$$\equiv \frac{1}{2} V_{1234} \underbrace{a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4}$$

Interpretation des Prozesses:



beschreibt Streuung von Teilchen 3, 4 in neue

Zustände 1, 2 mit Stärke V_{1234}

über alle mögl. Prozesse wird summiert.

$$\left(\langle \mu \mu \rangle \rightarrow \langle \mu \mu \rangle + \langle \mu \mu \rangle \right)$$

Fugie beid
= „Beine zusammen binden“

üben Feynman diagramme