3.2. Observable

im Experiment werden typischerweise Größen wie Strom, Dipol-dichte gemessen

q ∀ Elektronen $\qquad \vec r_i(t)$

Bsp: Dipoldichte $\vec P = \sum_i q_i \vec r_i \, \delta(\vec r - \vec r_i) = \vec P(\vec r, t)$

Dipolmoment über alle Elektronen

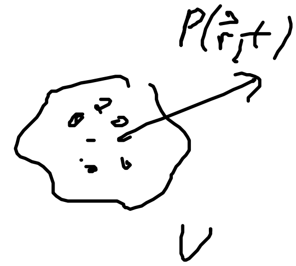
$\vec r_i$ - Bahnkurven

$$\vec P(\vec r, t) = \psi^\dagger(\vec r, t)\, q\vec r\, \psi(\vec r, t)$$

Dipoldichte in 2. er Quantisierg., später: Erwartungswert

→ Maxwellgleichungen

$$\vec P(\vec r, t) = \sum_{ij} \varphi_i^*(\vec r)\, a_i^\dagger(t)\, q\vec r\, \varphi_j(\vec r)\, a_j(t)$$



Moden-entwicklung

Heisenbergbildoperatoren für Elektronen

$$= \sum_{ij} \frac{1}{V} \int d^3r\, \varphi_i^*(\vec r)\, q\vec r\, \varphi_j(\vec r)\; \underbrace{a_i^\dagger(t)\, a_j(t)}$$

Dipolmoment $\vec d_{ij}$

Mittlg.

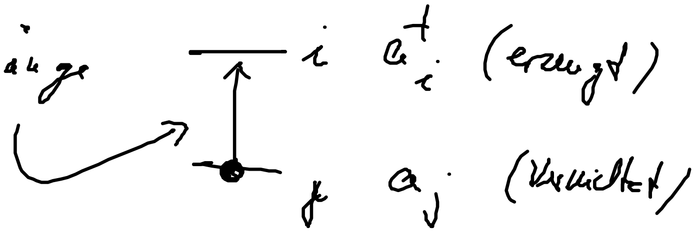
Mittlg. lt. Elektrodynamik

optische Übergänge

„Übergangsoperator" p_{ij}

Dipolmoment ist Übergangsstärke → Auswahlregeln

mikroskopische Polarisation / Übergänge



quantenmechanischer Erwartungswert:

$$\langle \vec{P} \rangle_{\substack{ED\\QM}} = \frac{1}{V} \sum_{ij} \vec{d}_{ij} \langle p_{ij} \rangle_{QM}$$

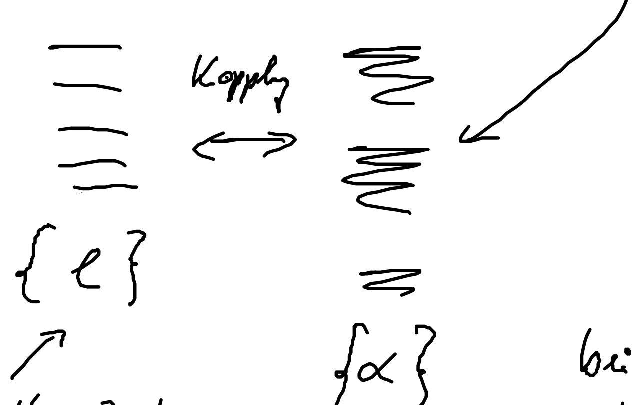
gesucht!

3.3. Elektron Phonon Kopplung und Dipoldichte

Satz v. elektronischen Zuständen mit Anfangsbedingung $\langle p_{ij} \rangle \neq 0$ (durch optisches Feld), wie zerfällt dieser Zustand der angeregten Dipoldichte:

1) → durch Abstrahlung → später

2) → Kopplung an Umgebung



elektron. Zustände (lateinisch)

Oszillatoren (griechisch)

bei uns: Kernbewegung (Phonon, Vibron)

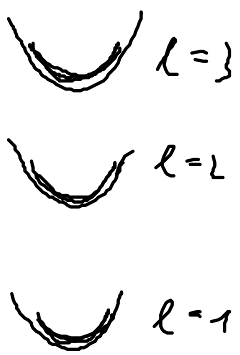
Irreversibilität: Ankopplg. des Systems (wenig Freiheitsgrade) an viele Freiheitsgrade der Umgebung

3.3.1 Hamiltonian

$$H_0 = \sum_e \varepsilon_e a_e^\dagger a_e + \sum_\alpha \varepsilon_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha$$

$$H = H_0 + V$$

elektronisches System   Umgebung



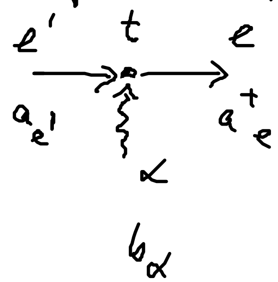
$\cancel{\alpha}$, gilt $\forall e$

$$V = \sum_{ee'\alpha} \hbar \underset{\nearrow}{g_\alpha^{ee'}}\; \underbrace{a_{e'}^\dagger a_e \left(b_\alpha + b_\alpha^\dagger\right)}_{\text{WW-Prozesse}}$$

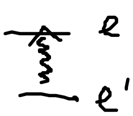
WW-Matrix   WW-Prozesse

$e \neq e'$ nichtdiagonal Kopplg.

$a_e^\dagger a_{e'} b_\alpha$



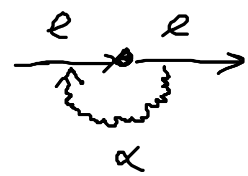
Elektronzustand wird geändert durch Phononabsorption, auch Phononemission



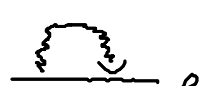
reales Prozess

$e = e'$ diagonal Kopplg.

$a_e^\dagger a_e b_\alpha$



Elektronzustand wird nicht geändert, allerdings kommt eine Phasenändg. auf



virtuelles Prozess

besser schreiben: $V = \sum_{ee'} \phi^{ee'} a_{e'}^\dagger a_e$

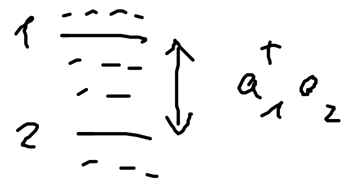
Operator der Phononen $\qquad \phi^{ee'} = \sum_\alpha \hbar g_\alpha^{ee'} (b_\alpha + b_\alpha^+)$

3.3.2 Bewegungsgleichungen f. ρ_{ij}

es gelten die Heisenberg-Bewegungsgleichungen:

$$-i\hbar\, \partial_t \underline{O} = [\underline{H}, \underline{O}] \quad \text{für beliebige } \underline{O}$$

$$\underline{O} = a_1^+ a_2$$



(i) mit H_0 $\qquad [H_0, a_1^+ a_2] = [\sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i, a_1^+ a_2]$

1. Anteil: $\varepsilon_i a_i^+ a_i a_1^+ a_2 = \varepsilon_i a_i^+ \underbrace{(\delta_{i1} - a_1^+ a_i)}_{\text{Fermikommutator}} a_2$

$$= \varepsilon_i a_i^+ a_2 \delta_{i1} - \varepsilon_i a_1^+ a_i^+ a_2 a_i$$

$$= \varepsilon_1 a_1^+ a_2 \delta_{i1} - \varepsilon_i (a_1^+ (\delta_{2i} - a_2 a_i^+) a_i)$$

$$= \underbrace{\varepsilon_1 a_1^+ a_2 \delta_{i1} - \varepsilon_2 a_1^+ a_2 \delta_{2i}}_{\text{mit } \sum_i \text{ ist } [H_0, a_1^+ a_2]} + \underbrace{a_1^+ a_2 a_i^+ a_i \varepsilon_i}_{\text{vertauschter Term}}$$

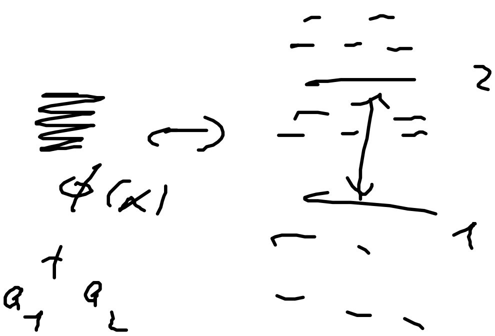
$$\rightarrow [H_0, a_1^+ a_2] = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a_1^+ a_2$$

(ii) $[V, a_1^+ a_2] = [\sum_{ee'} \phi^{ee'} \underline{a_e^+ a_{e'}}, a_1^+ a_2]$

mit Phonon vertauschen elektronische Operatoren

$$= \sum_e \left(\phi^{e1} a_e^+ a_2 - \phi^{2e} a_1^+ a_e \right)$$

beide Terme aufsammeln:



$$-i\hbar \partial_t a_1^+ a_2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) a_1^+ a_2$$

$$+ \sum_e \left(\phi^{e1} a_e^+ a_2 - \phi^{2e} a_1^+ a_e \right)$$

- Ziel war Berechnung der Dipoldichte $\sim \langle a_1^+ a_2 \rangle$

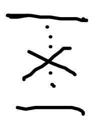
beschreibt 1) die freie Rotation mit $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{i}{\hbar} = \omega_{12}$

2) $\langle a_1^+ a_2 \rangle$ koppelt an Phononen

- Operatorgleichung! nur eingeschränkt lösbar

3.3.3 Wichtige Operatorbeziehungen am Beispiel eines eingeschränkten Modellsystems

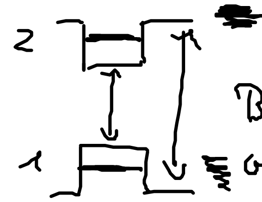
wichtige Begriffe am Beispiel: Zweiniveausystem



2 $\equiv g_\alpha^{22}$ $\qquad g^{12} = 0$

1 $\equiv g_\alpha^{11}$ $\qquad$ nur virtuelle Prozesse!

künstliche Atome – Quantenpunkte



Bandkante unterschied der verschiedenen Halbleiter

(c) Leitungsband

(v) Valenzband

$$\partial_t \underbrace{a_v^\dagger a_c} = i(\omega_v - \omega_c)\, a_v^\dagger a_c + i \overbrace{\sum_\alpha \left(g_\alpha^{vv} - g_\alpha^{cc}\right)\left(b_\alpha + b_\alpha^\dagger\right)}^{\phi(t)} a_v^\dagger a_c$$

$$\partial_t\, p(t) = i\,\omega_{vc}\, p(t) + i\,\phi(t)\, p(t)$$

$$\left(\partial_t p(t)\right) \cancel{e^{i\omega_{vc} t}} + \underline{i\omega_{vc}\, p(t)} \cancel{e^{i\omega_{vc} t}} = \underline{i\omega_{vc}\, p(t)}\, \cancel{e^{i\omega_{vc} t}} + i\phi(t)\, p(t)\, \cancel{e^{i\omega_{vc} t}}$$

Notation $p(t) \to \underline{p(t)\, e^{i\omega_{vc} t}}$

$$\partial_t\, p(t) = i\,\phi(t)\, p(t)$$

<u>weitere Annahme</u>: Phononsystem ist groß und viele Freiheitsgrade.

→ wird nicht gestört durch die WW

→ $b_\alpha^{(+)} = b_\alpha^{(+)}(t_0)\, e^{(\pm) i \omega_\alpha t}$: freie Bewegg. aus H_0

3.3.4 Die von Neumann Reihe

$$\partial_t p = i\phi p \longrightarrow p(t) = p(t_0) + i\int_{t_0}^{t} dt_1\, \phi(t_1)\, p(t_1)$$

implizit $\int \cdot\, p(t)$

weiter Iterieren:

$$p(t) = p(t_0) + i\int^{t} dt_1\, \phi(t_1)\, p(t_0) + i^2 \int^{t} dt_1\, \phi(t_1) \int^{t_1} dt_2\, \phi(t_2)\, p(t_2)$$

$$= \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (i)^n \int^{t} dt_1 \cdots \int^{t_{i-1}} dt_i \cdots \int^{t_{n-1}} dt_n\; \phi(t_1) \cdots \phi(t_i) \cdots \phi(t_n)\right) p(t_0)$$

bis ∞ Ordnung

formale Lösung als Reihe

$t \quad t_i \quad t_n$

Zeitordnung

Zeitordnung wäre kein Problem, wenn wir über ϕ als Zahl reden

aufpassen $[\phi(t_i), \phi(t_j)] =$ unbekannt!

wenn das Zahl wären, dann ist Lsg. der Dgl. $p(t_0)\, e^{i\int^{t} dt' \phi(t')}$

wie findet man das wieder?

$$p(t_0)\left(1 + i\int^{t} dt' + \frac{1}{2!}\left(i\int dt'\right)^2 \cdots\right)$$

$\underset{1}{p(t_0)}$

<u>0. Term</u> $\quad p(t_0) \equiv 1$ oBdA

<u>1. Term</u> $\quad i\int dt'\, \phi(t') \cdot 1$

2. Term : $i^2 \int^t dt_1 \int^{t_1} dt_2 \; \phi(t_1)\phi(t_2)$

$$= i^2 \frac{1}{2} \int^t dt_1 \int^{t_1} dt_2 \left(\phi(t_1)\phi(t_2) + \phi(t_1)\phi(t_2) \right)$$

① + umbenennung

② $t_1 \leftrightarrow t_2$

$$= i^2 \frac{1}{2!} \left(\left(\int^t dt_1 \int^{t_1} dt_2 + \int^t dt_2 \int^{t_2} dt_1 \right) \phi(t_1)\phi(t_2) \right)$$

$$= i^2 \frac{1}{2!} \left(\int^t dt_1 \int^t dt_2 \; \Theta(t_1 - t_2) + \int^t dt_2 \int^t dt_1 \; \Theta(t_2 - t_1) \right) \phi(t_1)\phi(t_2)$$

$$= i^2 \frac{1}{2!} \left(\int^t dt_1 \int^t dt_2 \left(\underbrace{\Theta(t_1 - t_2) + \Theta(t_2 - t_1)}_{1} \right) \phi(t_1)\phi(t_2) \right)$$

$$= i^2 \frac{1}{2!} \left(\int^t dt' \; \phi(t') \right)^2$$

ist der 2te Term der Exponentialreihe