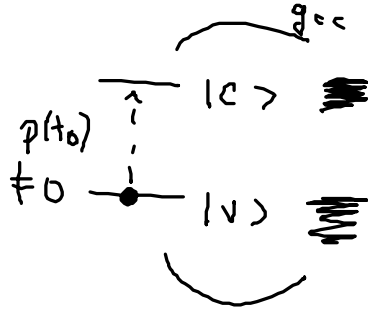


### 3.3.7 Lösung des Modells f. Elektron-Phonon WW

Modell des unabhängigen Bosons  
(independent Boson Modell)



Ziel: Dynamik der Dipol dichte  
 $p(t)$

Elektron  $g_{uv}$  Bosone (Bad)  
freie, ungekoppelte Bosone  
(„unabhängige B.“)

Lösung ist:

Dipol dichte-dynamik  $\rightarrow p(t) = p(t_0) \cdot \text{Sp}_{ph} \left( \sum_{u=0}^{\infty} \frac{i^u}{u!} \int dt_1 \dots \int dt_u T \phi(t_1) \dots \phi(t_u) \rho_{ph} \right)$

Aufangsdipol dichte  $\nearrow$   $\nearrow$  Einfluß der Phonon auf Dipol dichte

$p(t)$  gibt den Zeitverlauf der Dipol dichte (Oszillation des elektronischen Oszillators)

$$\phi(t) = \sum_{\alpha} g_{\alpha} (b_{\alpha}^{\dagger} + b_{\alpha})$$

$\nearrow$  Kopplg frei  
verschiedene Oszillatoren  $\alpha$

$\nwarrow$  Auslegung des Oszillators

die  $\sum$  jetzt ansehen, Zeitliche große „mit denken“

$u = 0$  ergibt 1 freie Oszillation ( $p(t) \rightarrow p(t) e^{i\omega_{vc} t}$ )

immer gradzahlige  $u$ -s hängen bei!  $u \rightarrow 2u$

$$\rightarrow \sum_{u=1}^{\infty} \frac{i^{-2u}}{(2u)!} \underbrace{\int_0^t dt_1 \dots \int_0^t dt_{2u}}_{\text{nicht mitgeschrieben (vorstellen)}} T \phi(t_1) \dots \phi(t_{2u})$$

Phononpropagator

$u = 1$

$$\frac{-1}{2!} \underbrace{\langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle}_{\text{Phononpropagator } D(t_1, t_2) \text{ bekannt}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

Grundbausteine

$u = 2$

$$\frac{(-1)^2}{4!} \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \phi(t_3) \phi(t_4) \rangle$$

$$= \frac{(-1)^2}{4!} \langle T \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_{\text{jedes mögl. Paar aufschreiben und Wick}} \rangle$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \phi_1 \phi_2 d_1 d_2 = \frac{(-1)^2}{4!} \begin{pmatrix} \circ - \circ & \circ - \circ \\ + \circ - \circ & \circ - \circ \\ + \circ - \circ & \circ - \circ \end{pmatrix} = \frac{(-1)^2}{4!} \begin{pmatrix} \circ - \circ^2 \\ + \circ - \circ^2 \\ + \circ - \circ^2 \end{pmatrix}$$

$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4$

die sind alle gleich dem über die Zeit  $t_i$  wird integriert

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \phi_3 \phi_4 d_3 d_4 = \frac{(-1)^2}{4!} \cdot 3 (\circ - \circ)^2 = \frac{(-1)^2}{8} (\circ - \circ)^2 = \frac{1}{2!} \left( -\frac{1}{2} \circ - \circ \right)^2$$

offensichtlich ist das die Grundbausteine der Reihe

$n=3$

$$\frac{(-1)^3}{6!} \langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5 \phi_6 \rangle =$$

$$\frac{(-1)^3}{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \begin{pmatrix} \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ \\ \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ \\ \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ \\ \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ \\ \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ & \circ - \circ \end{pmatrix}$$

1. Schritt: 6-1 Mgl. einen und den anderen zu kombinieren  
2. Schritt: verbleibend 4 weitere Kombinationen

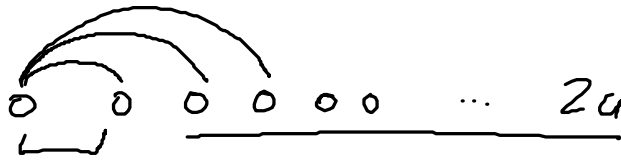
für Exponentialreihe!

$$= \frac{(-1)^3}{3!} \frac{1}{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2}}{2} (0 \ 0)^3$$

$$= \frac{1}{3!} \left( -\frac{1}{2} \ 0 \ 0 \right)^3$$

u beliebig

$$(-1)^u \frac{1}{(2u)!} \langle T \phi_1 \dots \phi_{2u} \rangle$$



$t_1 \ t_2$

$t_{2u}$

wieviele Mgl. Paare zu bilden?

jeweils 2 abziehen

$$(2u-1) (2u-2-1) \dots 1$$

Möglichkeit

einen Punkt und

einen auch zu verbinden

dann hat man noch  $2u-2$  zur Verfügung

$$\underbrace{(2u-1)(2u-3)(2u-5) \dots 3 \cdot 1}$$

$$= \frac{(2u)!}{u! 2^u} \quad (\text{Heftbuch})$$

$$= \frac{1}{u!} \left( -\frac{\circ\circ}{2} \right)^u$$

→ alle Terme zusammen

$$P(t) = P(t_0) \sum_u \frac{1}{u!} \left( -\frac{\circ\circ}{2} \right)^u$$

$$= P(t_0) \exp \left( -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 \underbrace{\langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle}_{\text{Photon propagator}} \right)$$

Grundbaustein GB

Damit ist als Funktion des Photonpropagators eine exakte Lösung gefunden.

$$GB = \left| \begin{array}{l} \text{kann durch Beding. der} \\ \text{Integral gelöst werden, logarithmisch} \end{array} \right| =$$

$$P(t) = P(t_0) e^{i\omega_{vc} t} \cdot \exp\left(i \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}} t - \varphi(t)\right)$$

freie Oszillation  
wirds hinzu fügen  
(Avalanz)

Frequenzverschiebung.

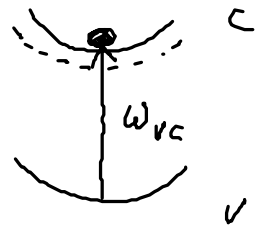
$$\varphi(t) = \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} \left\{ (1+u_{\alpha})(1-e^{-i\omega_{\alpha} t}) + u_{\alpha}(1-e^{i\omega_{\alpha} t}) \right\}$$

Modifizierung der Dipoloszillation durch das Phononbad

Bemerkung:

- Die Frequenzslipf  $\omega_{vc} \rightarrow \omega_{vc} + \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}}$

$$\omega_v - \omega_c < 0$$



Reorganisation energie der Kerne,  
passen sich dem neuen El-Zustand an

-  $\varphi(t)$  enthält Vielphononprozesse:

$$e^{-\varphi(t)} \sim e^{e^{i\omega_\alpha t}} \sim \sum_n \frac{1}{n!} (e^{i\omega_\alpha t})^n$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!} e^{i n \omega_\alpha t}$$

$\swarrow$   
 n mal Phonon frequenz

n- Quanten sind an bestimmte Prozesse beteiligt.

"n- Phonon" Prozesse  $\hat{=}$  sprechweite

- Phonon besetzungszahl  $n_\alpha = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_\alpha} - 1} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \beta \hbar \omega_\alpha} \approx \frac{kT}{\hbar \omega_\alpha}$

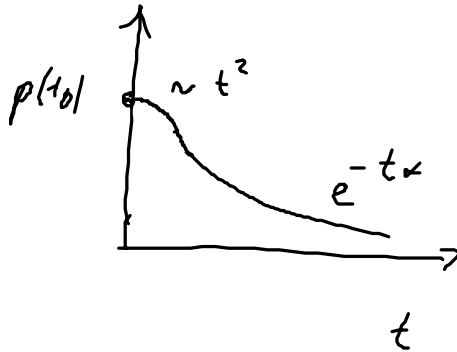
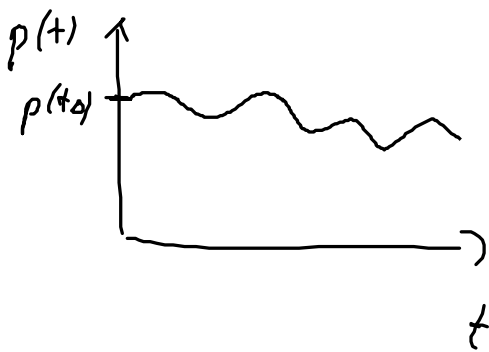
$\beta = \frac{1}{kT}$   
 Hochtemp-  
 limes

$\hbar \omega$  ist temp. abhängig

- es hängt stark von Charakter des Phonon systems ab,  
 welchen Zeitverlauf die Dipolstärke annimmt:

1 Oszillator  $\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \alpha \quad \beta \end{array}$

viele Oszillatoren, dicht liegen



Schwach mit  
 vielen Frequenzen  
 u  $\omega_\alpha$

### 3.4. Diskussion des inhomogenen Bessel Modells

#### 3.4.1. Ein Oszillator ohne $\alpha = 0$

$$P(t) = P(t_0) e^{i\tilde{\omega}_{vc} t} e^{-\varphi(t)}$$

$$\varphi(t) = \frac{g_0^2}{\omega_0} \left( (1+u_0) (1 + e^{-i\omega_0 t}) + u_0 (1 - e^{i\omega_0 t}) \right)$$

diese Lösung kann man umschreiben: (o.B.)

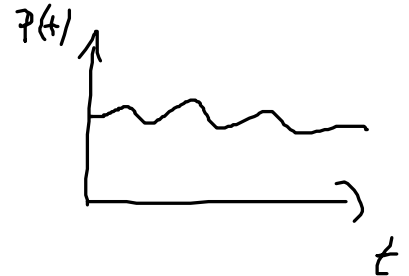
$$P(t) = P(t_0) e^{i\tilde{\omega}_{vc} t} e^{-\frac{g_0^2}{\omega_0^2} (2u_0+1) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} I_{|l|} \left( \frac{2g_0^2}{\omega_0^2} u_0(u_0+1) \right)} e^{il\omega_0 t}$$



$$I_{|e|}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! ((l+k)!)^2} \binom{x}{\frac{l+k}{2}} \quad \begin{matrix} (l+k) & l\text{-Plasma Prozess} \\ e^{-\frac{\beta \omega_0 t}{2}} \end{matrix}$$

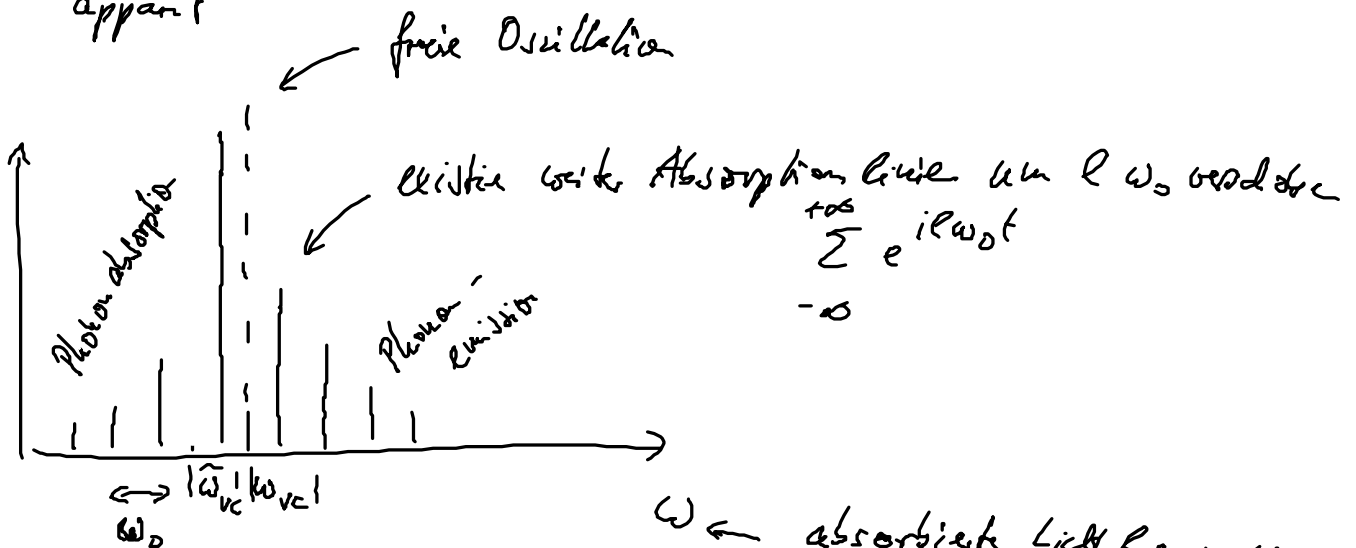
// Strahl  $\sim \sum_e \alpha_e e^{i l \omega_0 t}$  im Fourierbild

→ dh. es taucht Oszillation mit  $l \omega_0$  auf.



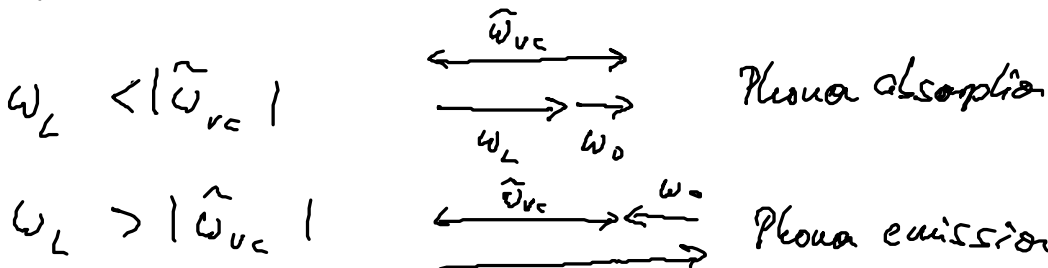
Was wird man in optisch Spektren messen?

$P(t) \rightarrow P(\omega)$ , bzw  $J_m(\chi(\omega))$  ist Maß für Absorption  
Spektal-  
apparat



$\omega \leftarrow$  absorbiertes Licht frequenz  $\omega_L$

Wie kann Licht absorbiert werden?



- Das Bild charakterisiert typischer Modenfeldspektrum,  
bzw. AL - Quantenpunkt.
- durch Vgl. mit Exp. kann man  $g_{\alpha}, \omega_{\alpha}$  bestimmen.
- Asymmetrie zwischen Emission / Absorption  
 $(u_{ph} + 1)$      $(u_{ph})$   
 $\uparrow$   
 Emission ist immer ungl.  
 auch wenn  $u_{ph} = 0$   
 $T \rightarrow 0$

### 3.4.2. Viel, dichtliegend Mode (Festkörper)

$$\sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} = \int d\omega \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} \delta(\omega - \omega_{\alpha}) = \int d\omega J(\omega)$$

$$J(\omega) = \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} \delta(\omega - \omega_{\alpha})$$

günstiger zu integrieren bei vielen Moden statt  $\alpha$  zu zählen

Definition der

Spektraldichte



Modelle machen für  $J(\omega)$

leicht lösbares Modell ist Debye - Spektraldichte :

$$\omega J(\omega) = \Theta(\omega) \frac{\alpha_0^2}{\omega^2 + \omega_D^2}$$

typischer Oszillator frequenz  
schwächt die Spektraldichte ab :

ab  $\omega_D$  koppeln die Oszillatoren nicht mehr gut an Elektronen

$\alpha_0$  - Konstante  $\hat{=}$  Stärke der Spektraldichte

$\Theta(\omega)$  stellt  $\omega > 0$  sicher

$$J(\omega) \rightarrow 0 \text{ für } \omega \rightarrow \infty$$

sehr starke Kopplg.  $\omega \rightarrow 0$

Sowohl Zeitverlauf als auch Energieerhalt sind beide bar

$$P(t) \sim e^{-\text{Re}(\varphi(t))}$$

macht die zeitliche Dämpfung

$$\text{Re}(e^{\pm i\omega_\alpha t})$$

$$\text{Re}(\varphi(t)) = \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} (\gamma + 2\omega_{\alpha}) (1 - \cos(\omega_{\alpha} t))$$

Hochfrequenzlinien

$$= \int d\omega J(\omega) (1 - \cos(\omega t)) \frac{2kT}{\hbar \omega}$$

man kann das Integral auch reduzieren (langweilig):

$$\text{Re}(\varphi(t)) = \gamma (e^{-\omega_D t} + \omega_D t - 1)$$

gilt die Dämpfung der Torsionsoszillation

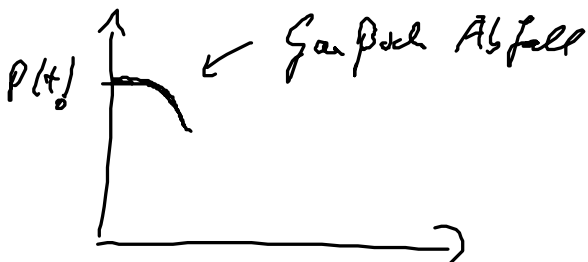
$$\gamma = \frac{\hbar kT \alpha_0^2}{\hbar \omega_D^3}$$

Bemerkung:

Interferenz der Oszillation  $\omega_D / \omega$  gibt ein zeitliches Abfall

$$a) \text{ kurze Zeit } ( ) \sim \underbrace{\left( 1 - \omega_D t + \frac{1}{2}(\omega_D t)^2 + \omega_D t - 1 \right)}_{\text{aus } e^{-\omega t}}$$

$$P(t) = P(t_0) e^{-\gamma(\omega_D t)^2}$$



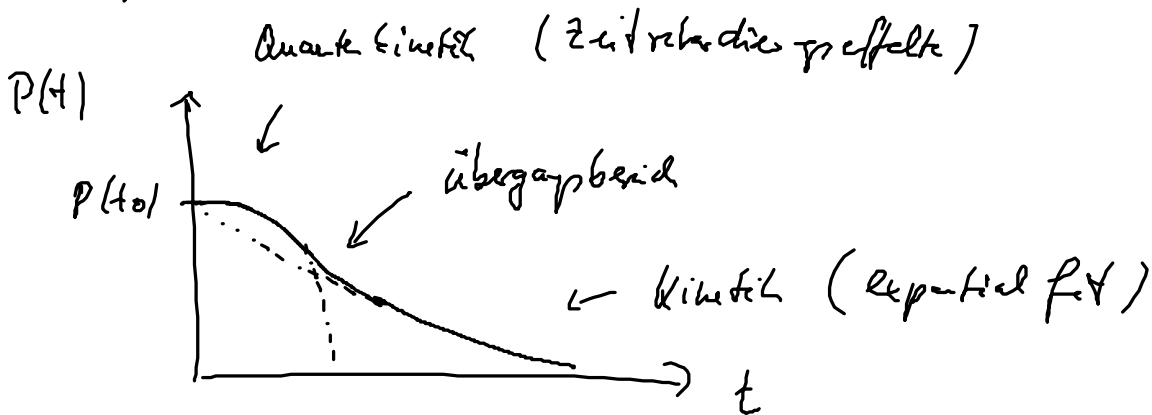
t

b) lange Zeit  $( ) \approx ( \cancel{e^{-\omega_0 t}} + \omega_0 t \cancel{-1} )$

$$P(t) = P(t_0) e^{-\gamma \omega_0 t}$$

exponentieller Zerfall

gesamte Verhalten:



In Spektrum findet man für kurze Zeit Gauß,  
für lange Zeit eine Lorentz.

Für hohe Temperaturen dominiert Lorentz.

Kurzzeitbereich  $t \ll \omega_D^{-1}$ : Kerne noch keine volle Schwingg.  
ausgeführt  $\rightarrow$  kleine Teilchen Dachsen

Langezeitbereich  $t \gg \omega_D^{-1}$ : Kerne haben mehr Schwingg. hinter  
sich, kleine Eigenschaften dominieren