4. Wechselwirkende Quantenfelder: Elektron-Photon-Kopplung

4.1. Quantisierung des elektromagnetischen Felds

Formalismus anwenden aus Kapitel 1

a) Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2(\vec{r},t) - \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r},t)\right)$$

$$\vec{E} = \cancel{-\nabla\phi} - \partial_t A \, , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

im Vakuum quantisieren $\phi = 0$

Strahlungseichung im Vakuum

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3}\left(\varepsilon_0 \left(\partial_t A_l\right)^2 - \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_l^2\right)$$

in Koordinatenschreibweise

b) Impuls als Variable

$$\Pi_{\vec{A}} \rightarrow \Pi_{A_x} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_x)} = \varepsilon_0\,\partial_t A_x = -\varepsilon_0 E_x$$

auch y, z Komponente

→ Vektorpotential und elektrisches Feld sind zueinander

konjugierte Variable

c) Vertauschungsregeln

transversale Deltafunktion, sonst ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$ im Vakuum

$$\left[A_e(\vec{r},t),\ E_m(\vec{r}',t) \right] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\, \delta_{em}\, \delta^T(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\underbrace{\delta_{em}\,\delta^T(\vec{r}-\vec{r}')}_{\text{Tensor } (e,m)} = \delta_{em}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') - \frac{1}{4\pi}\,\partial_e\partial_m \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\vec{r} = \sum_n \vec{e}_n x_n$$

$$\partial_e \vec{r} = \sum_n \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial x_e} x_n$$

d) Feldoperatoren einführen

$$\underline{\vec{A}},\ \underline{\vec{E}}$$

e) Hamiltonoperator f. Bewegungsgl.

$$\mathcal{H} = (-\partial_t \underline{\vec{A}})\cdot\underline{\vec{E}}\,\varepsilon_0 - \mathcal{L}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

f) aus Lagrangegl. → Feldgleichungen

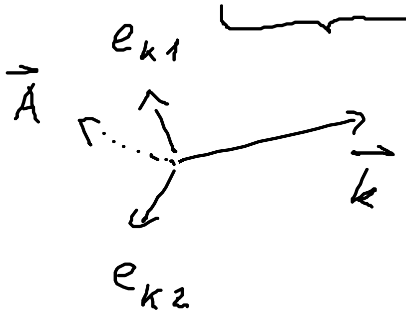
$\Box \vec{A} = 0$ Wellengleich. im Vakuum

g) Modenentwicklg. nach vollständigem System von $\Box \vec{A} = 0$

ebene Wellen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_n u_n(\vec{r})\, c_n(t)$$

ebene Welle Photonoperator



$\lambda = \underline{1,2}$, $n : (\vec{k}, \lambda)$

$\vec{e}_{k\lambda}$ 1,2

Operator im Heisenberg.

$$\vec{A} = \sum_k \sum_{\lambda=1}^{2} f_k\, \vec{e}_{k\lambda}\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, c_{\lambda k}(t) + h.a.$$

Einheit Amplitude (dimensionslos)

$$f_k = \left(\frac{\hbar}{2 \varepsilon_0 c |\vec{k}| L^3} \right)^{1/2}$$

diese Wahl stellt sicher daß $[c_{\lambda k}, c^{\dagger}_{\lambda' k'}] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'}$ und

$$H = \sum_{\lambda k} \hbar \omega_{\lambda k} c^{\dagger}_{\lambda k} c_{\lambda k}$$

$$\underline{E} = \partial_t \underline{A} = \sum_{k\lambda} i g_k \vec{e}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} c_{\lambda k}(t) + h.a.$$

$$\underline{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \sum_{k\lambda} f_k i\vec{k} \times \vec{e}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} c_{\lambda k}(t) + h.a.$$

$$g_k = \left(\frac{\hbar \omega_k}{2 \varepsilon_0 L^3} \right)^{1/2}, \quad \omega_k = c|k|$$

(aus $\dot{c}_{\lambda k}(t) = -i\omega c_{\lambda k}$)

h) Darstellung von H in Moden:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3r \left(\varepsilon_0 (\partial_t \vec{A})^2 + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \right) = H(c^{\dagger}, c)$$

durch einsetzen von $\vec{E}$, $\vec{B}$ folgt:

$$H = \sum_{\lambda k} \hbar \omega_k \left(c^{+}_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2} \right)$$

$c|k|$

Bemerkungen

a) Strahlungsfeld kann wieder durch ein Satz von harmonischen Oszillatoren dargestellt werden

Die Oszillatoren beschreiben die Anregungen der einzelnen Moden und Photonen

b) Photonen sind Bosonen

$$\rightarrow \left[c_{\lambda k}, c^{+}_{\lambda' k'} \right]_- = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'}$$

$$\left[c^{(+)}_{\lambda k}, c^{(+)}_{\lambda' k'} \right]_- = 0$$

c) wichtige Effekte: aus Quantentheorie des Strahlungsfelds

- Dirac H-Atom $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ hat Entartung dies wurde durch Quantisierg. des Strahlgs felds aufgehoben (Lamb-shift)

- spontan Emission (Lampen licht!)

- Übergang von spontaner Emission → Laserlicht

- nichtklassisch Zustände (Fockzustände)

  z.B. Zustand mit 1 Photon

Nachtrag zu Ableitg. des $\underline{H}$:

$$H_{E^2} = \int d^3 r \, \frac{\varepsilon_0}{2} \overbrace{\sum_{\lambda k} \left(i g_k \vec{e}_{k\lambda} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} c_{\lambda k}(t) - i g_k \vec{e}_{k\lambda} e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} c^+_{\lambda k}(t) \right)}^{E}$$

$$(\partial_t A)^2 \qquad \underbrace{\sum_{\lambda' k'} \left(i g_{k'} \vec{e}_{k'\lambda'} e^{i \vec{k}' \vec{r}} c_{\lambda' k'}(t) - i g_{k'} \vec{e}_{k'\lambda'} e^{-i \vec{k}' \cdot \vec{r}} c^+_{\lambda' k'}(t) \right)}_{E}$$

beim Ausmultiplizieren:

siehe Statistik

4 Term, in jedem $\underbrace{\int d^3 r \, e^{i (\vec{k} - \vec{k}') \vec{r}}}_{(2\pi)^3 \delta(\vec{k} - \vec{k}')} \longrightarrow \delta_{kk'} L^3$

d.h. 1 Summe verschwindet

kürzt sich in g_k^2 raus.

$$\vec{e}_{k\lambda'} \cdot \vec{e}_{k\lambda} \to \delta_{\lambda\lambda'}$$

d.h. nur 1 λ Summe entsteht

4 Terme:

$$c_{\lambda k} c_{\lambda k} \longrightarrow \text{fallen raus mit } H_{B^2}$$

$$c^\dagger_{\lambda k} c_{\lambda k} \longrightarrow \text{wollen wir}$$

$$c_{\lambda k} c^\dagger_{\lambda k} \longrightarrow c^\dagger_{\lambda k} c_{\lambda k} + 1$$

$$c^\dagger_{\lambda k} c^\dagger_{\lambda k} \longrightarrow \text{fallen raus mit } H_{B^2}$$

$$2\left(c^\dagger_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2}\right) \checkmark$$

übrige Vorfaktoren ergeben $\frac{\hbar \omega_k}{2}$

$$\Rightarrow H = \sum_{\lambda k} \hbar \omega_k \left(c^\dagger_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2}\right)$$

(jetzt kann man auch $[A, E] \sim \delta^T$

ausrechnen durch einsetzen der Modenentwicklung)

4.2. Elektron - Photon - Wechselwirkung

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{ww}$$

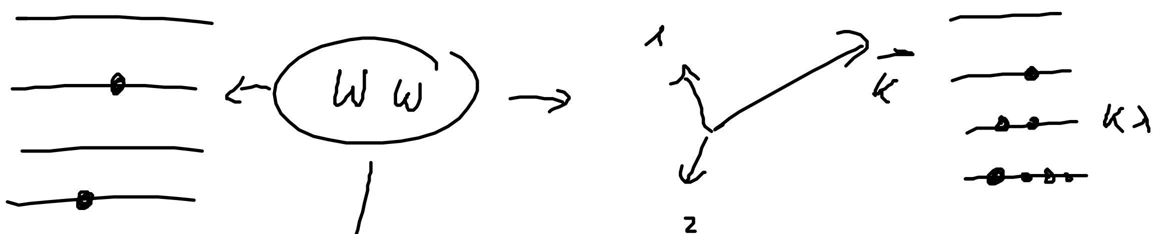
freie Strahlungsfeld
+ freie Elektronfeld

Wechselwirkung

ck

$$\underline{H}_0 = \sum_n \underbrace{\hbar\omega_n}_{E_n} a_n^+ a_n + \sum_{\lambda k} \hbar\omega_k c^+_{\lambda k} c_{\lambda k}$$

Vielniveau-system



0 Dipolnäherung

$$H^{(1)}_{ww} = \underbrace{\sum_i q \vec{r}_i(t)}_{\text{Dipol von Elektron in 1. Quantisierung}} \cdot \vec{E}(\cancel{\vec{r}_i}, t)$$

Dipol von Elektron
in 1. Quantisierung
im elektr. Feld

$$\underline{H}_{ww}^{(2)} = \int d^3r\; \underline{\psi}^{\dagger}(r,t)\, q\vec{r}\; \underline{\psi}(\vec{r},t) \cdot \vec{\underline{E}}(t)$$

Umrechnung von
Einteilchenoperator
in 2. Quantisierung.

z.B.
stationäre Schrödingergl. (H-Atom)

$$= \sum_{n_1 n_2} \underbrace{\int d^3r\; \varphi^{*}_{n_1}(\vec{r})\, q\vec{r}\; \varphi_{n_2}(\vec{r})}_{\text{atomares Dipolmoment } \vec{d}_{n_1 n_2}} a^{\dagger}_{n_1}(t)\, a_{n_2}(t)\, \underline{\vec{E}}(t)$$

einsetzen der
Modenentwicklung

$$= \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda, k}} \underbrace{\vec{d}_{n_1 n_2} \cdot i g_k \vec{e}_{k\lambda}}_{g^{k\lambda}_{n_1 n_2}} a^{\dagger}_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + h.a.$$

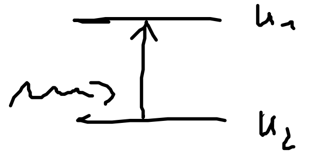
$$H_{ww} = \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda k}} g^{\lambda k}_{n_1 n_2}\, a^{\dagger}_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + h.a.$$

Interpretation analog zu Phononen:

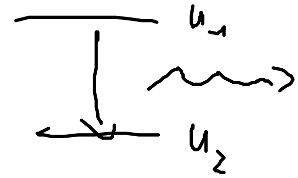
Photon vernichtg →

elektronischer Übergang

Absorption



Emission

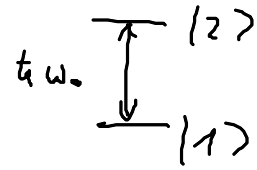


Hamiltonoperator einfach gestalten:

„Drehwellennäherung“

„rotating wave approximation“

<u>Zunächst</u> freies Feld: $$a_1^+ a_2 \sim e^{\overbrace{i(\omega_1-\omega_2)}^{<0} t} = e^{-i\omega_0 t}$$



$$c^{(+)}_{\lambda k} \sim e^{(\pm) i \omega_k t}$$

man nimmt die Terme mit, die in Resonanz sind

$\omega_0 \approx \omega_k$, 2 Niveaus:

$$\underline{H}_{ww} = \sum_{k\lambda} \left(g_{12}^{k\lambda}\, a_1^+ a_2\, c^+_{\lambda k} + g_{21}^{k\lambda}\, a_2^+ a_1\, c_{\lambda k} \right)$$

$\sim e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{i\omega_k t}$ $\quad\quad$ $\sim e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega_k t}$

$\omega_0 \approx \omega_k$

$+ \cancel{e^{\pm i(\omega_0+\omega_k)t}}$ RWA

Sind typischerweise nicht energieerhaltende Prozesse und nur auf sehr kurze Zeitskala wichtig.

klein

$\uparrow$

$\Delta E \cdot \Delta t \sim$ konst

$\downarrow$

groß

Energieerhaltung findet nur auf lange Zeitskala statt

bei Bewegungsgleichg.

mitnehmen $\quad$ weglassen

$$\langle a_1^\dagger a_2 \rangle \sim \underbrace{\frac{1}{\omega_0-\omega_k}}_{\text{mitnehmen}} + \underbrace{\frac{1}{\omega_0+\omega_k}}_{\text{weglassen}}$$

Dipoldichte