4.5. Strahlungsdämpfung und Lambverschiebung

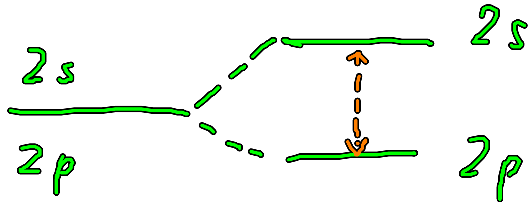
neben spontanen und induzierten Prozessen in der Besetzungszahl der Elektronmoden / Photonmoden 2 weitere wichtige quantenelektrodynamische Effekte:

a) Strahlungsdämpfung:

Abklingen der Dipoldichte durch Emission von Strahlungsenergie in Vakuumfeld

b) Aufhebung von Energieentartungen durch die WW von Elektronen mit dem Strahlungsfeld

(„Lamb-shift“)



$(j = \frac{1}{2})$

Dirac:

Entartung

$E = E(n,j)$ entartet

$\psi = \psi(n,j,m_j,l)$

W. Lamb, T. Hänsch } Experiment

H. Bethe, J. Schwinger ... } Theorie

Sehen wirklich 2 Niveau system an

$$\begin{array}{l} \text{——} \; |2\rangle \\ \text{——} \; |1\rangle \end{array} \quad \text{bzw} \quad \text{——} \; |1\rangle|2\rangle$$

4.5.1. Strahlungsdämpfung von Zweiniveausystem

sinnvolle Observable: $\vec{P}(r,t) \longrightarrow$ proportional $\langle a_1^\dagger a_2 \rangle$

Abschnitt 4.3.:

$$\partial_t \langle a_1^\dagger a_2 \rangle = \underbrace{i\,\omega_{12} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle}_{\text{freier Oszillator}} - i \sum_{\lambda k} \underbrace{\tilde{g}_{21}^{k\lambda} \left(\langle a_2^\dagger a_2 c_{\lambda k} \rangle - \langle a_1^\dagger a_1 c_{\lambda k} \rangle \right)}_{\text{WW d. Oszillators mit Strahlungsfeld}}$$

$$\sim e^{i\omega_{12} t} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle \big|_0$$

$\langle a_i^\dagger a_i c_{\lambda k} \rangle \;\hat{=}$ photonassistierte Besetzungszahl

Idee f. Störungstheorie f. Hierarchieproblem:

Näherg. auf bestimmter Stufe der Hierarchie in Ordnung: g^4.

$$\langle AB \rangle = \langle (\langle A\rangle + \delta A)(\langle B\rangle + \delta B) \rangle$$

$$= \langle A\rangle \langle B\rangle + \langle A\rangle \langle \delta B\rangle + \langle B\rangle \langle \delta A\rangle$$

$$+ \cancel{\langle \delta A \, \delta B \rangle}$$

höhere Fluktuation f.
schwache WW vergessen

$\langle a_i^\dagger a_i c \rangle \rightarrow \langle a_i^\dagger a_i \rangle \langle c \rangle$ ≙ unterster Näherg.

$\langle c \rangle = ?$

- nächste Näherg. wäre 1 Ordnung höher, d.h.
  Gleichungen für $\langle a_i^\dagger a_i c_{\lambda k} \rangle$ = ableiten und dort faktorisieren

- damit sind wir in derselben Ordnung wie für die Raten-
  gleichungen f. f_2, n_0 aus 4.4.

$$\partial_t \langle a_i^\dagger a_i c_{\lambda k} \rangle = ?$$

$$\partial_t \left(a_i^\dagger a_i c_{\lambda k} \right) = \left(\partial_t a_i^\dagger a_i \right) c_{\lambda k} + a_i^\dagger a_i \left(\partial_t c_{\lambda k} \right)$$

Sind aus 4.3 bekannt, einsetzen

$$= \underbrace{-i\omega_{\lambda k} a_i^\dagger a_i c_{\lambda k}}_{\text{freie Oszillation der Photonen}} + a_i^\dagger a_i i \tilde{g}_{12}^{k\lambda} a_1^\dagger a_2 + \text{Terme} \sim \underbrace{\begin{matrix} c_{\lambda k} c_{\lambda k} \\ c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} \end{matrix}}_{\text{schwache Emission: } n_{\lambda k} \ll 1}$$

Reabsorption wird weggelassen

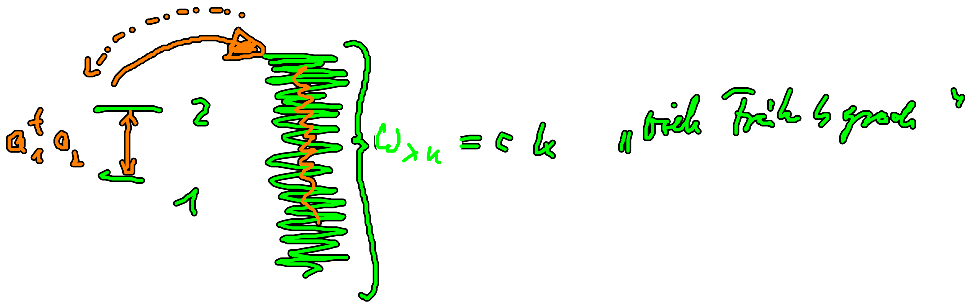
$$= -i\omega_{\lambda k} a_i^\dagger a_i c_{\lambda k} + i g_{12}^{k\lambda} \underbrace{a_i^\dagger (\delta_{i1} - a_1^\dagger a_i) a_2}_{a_1^\dagger a_2 \delta_{i1} - a_i^\dagger a_1^\dagger \underbrace{a_i a_2}}$$

trägt nicht bei, da nur 1 Elektron im System und 2 vernichtet

$$\partial_t \langle a_1^\dagger a_1 c_{\lambda k} \rangle = -i\omega_{\lambda k} \langle a_1^\dagger a_1 c_{\lambda k} \rangle + i \tilde{g}_{12}^{\lambda k} \langle a_1^\dagger a_2 \rangle$$

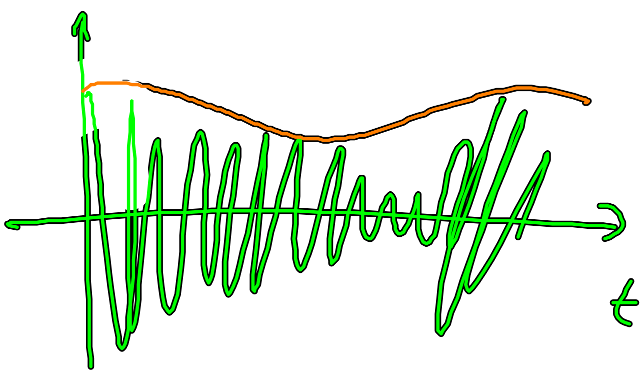
Damit ist System von $\partial_t \langle a_1^\dagger a_2 \rangle = \dots$ (oben) geschlossen.

Die entstehende Gleichungen sind Musterbeispiel f. WW eines Dynamischen und eines dissipativen Systems:



Energiefluß nach rechts

$$\langle a_1^+ a_1 c_{\lambda k} \rangle = \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i\omega_{\lambda k}(t-t')} \, i \tilde{g}^{k\lambda}_{12} \underbrace{\langle a_1^+ a_2 \rangle (t')}_{\text{Ansatz}}$$



$$\langle a_1^+ a_2 \rangle = \widetilde{\langle a_1^+ a_2 \rangle} \, e^{i\omega_{12} t}$$

ρ_{12}

langsam gegen ω_{12}

$$= i \tilde{g}^{k\lambda}_{12} \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i\omega_{\lambda k}(t-t')} \, e^{i\omega_{12} t'} \, \tilde{\rho}_{12}(t') \underbrace{e^{-i\omega_{12} t} \, e^{+i\omega_{12} t}}_{\cdot \; 1}$$

$$= i \tilde{g}^{k\lambda}_{12} \int^{t} dt' \, e^{-i(\omega_{\lambda k} + \omega_{12})(t-t')} \, \tilde{\rho}_{12}(t') \, e^{i\omega_{12} t}$$

$-\infty$

$$s = t - t'$$

die langsame Größe

$$= i\, \tilde{g}_{12}^{k\lambda} \int_0^\infty ds\, e^{-i(\omega_{\lambda k} + \omega_{12})s}\, \underline{\tilde{p}_{12}(t - \cancel{s})}\, e^{i\omega_{12} t}$$

- Gedächtnis ausgeblendet
- Markoff-Näherung.

$$= i\, \tilde{g}_{12}^{k\lambda} \int_0^\infty ds\, e^{-i(\omega_{\lambda k} + \omega_{12})s} \qquad p_{12}(t)$$

$e^{-\gamma s}$

als konvergenzerzeugender Faktor

am Ende $\gamma \to 0$

$$= i\, \tilde{g}_{12}^{k\lambda}\, \frac{\gamma + i(\omega_{\lambda k} - \omega_0)}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k} - \omega_0)^2} \qquad \omega_0 = -\omega_{12}\,, \quad \omega_{12} < 0$$

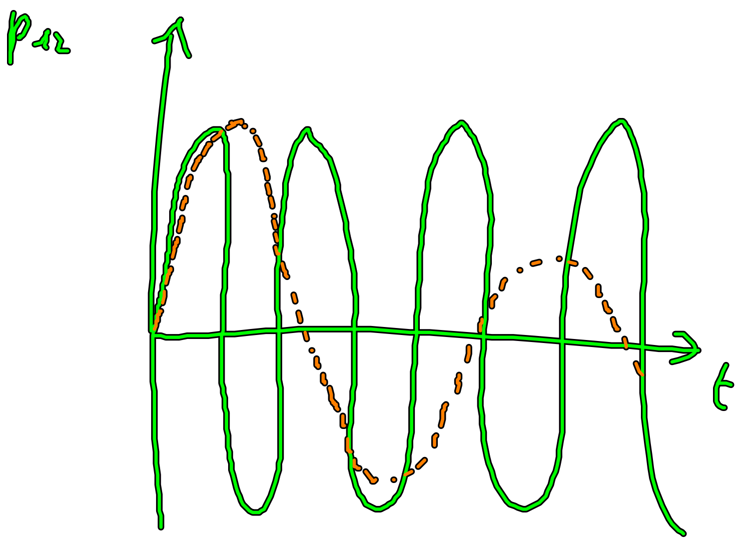
einsetzen in Gleichg. f. Dipoldichte $p_{12}(t)$:

Verschiebung der Oszillatorfrequenz

$$\partial_t\, p_{12}(t) = i\,\omega_{12}\, p_{12}(t) - \gamma_{rad}\, p_{12}(t) - i\,\delta_{rad}\, p_{12}(t)$$

Dämpfung des Oszillators (rad = radiativ)

$$\boxed{e^{-i(\omega_{12} - \delta_{rad})t \; - \gamma_{rad} t}}$$



qu. Beschreibung der Dämpfung und E-Verschiebung:

$$\gamma_{rad} = \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k} - \omega_0)^2}$$

$$\delta_{rad} = \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \frac{\omega_{\lambda k} - \omega_0}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k} - \omega_0)^2}$$

$|g|^2$ bestimmt die Stärke der Dämpfg. / Verschiebg.

in VL 4.4: $\Gamma = 2\gamma_{rad} \equiv \Gamma_{rad}$

Rate der spontan Emission

$$\dot{\rho}_2 = \langle \dot{a}_2^{+} a_2 \rangle = -\Gamma \rho_2 \ldots$$

$$\dot{n}_0 = \Gamma \rho_2$$

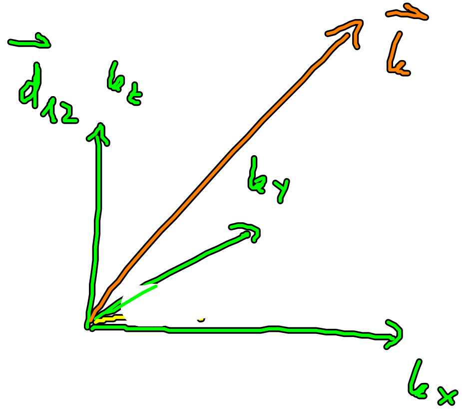
4.5.2. Berechnung der Rate

$$\sum_{\lambda k} \frac{|g_{12}^{\lambda k}|^2}{\hbar^2} \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k} - \omega_0)^2}}_{\pi\,\delta(\omega_{\lambda k} - \omega_0) \text{ für } \gamma \to 0} \qquad (\omega_0 = -\omega_{12})$$

$$= \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_\lambda \frac{\omega_{\lambda k} |\vec{d}_{12} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)}|^2}{\hbar\, 2\varepsilon_0 L^3} \pi\,\delta(\omega_{\lambda k} - \omega_0)$$

$$\omega_{\lambda k} = c|\vec{k}| = \omega_k$$

$$\frac{\pi}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3 \hbar} \int_0^\infty dk\, k^2\, \underline{\underline{\omega_k}}\, \delta(\omega_k - \omega_0) \int d\Omega \sum_\lambda |\vec{d}_{12} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)}|^2$$



$\int$ Winkel ϑ, φ

drehen Winkel integration so, dass ϑ ∡ zwischen $e_{\lambda(1)}$ und d_{12} ist:

$$\longrightarrow \quad \vec{d}_{12} \cdot \vec{e}_{\lambda(1)} = d_{12} \cdot 1 \cos\vartheta$$

$$\longrightarrow \int d\vartheta \left| \vec{d}_{12} \cdot \vec{e}_{\lambda(1)} \right|^2 =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}_{\int_{-1}^{1} dx\, x^2 \,=\, \frac{1}{3} \cdot 2} = 2\pi \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\vartheta = x \rightarrow x^2 = \cos^2\vartheta \\ dx = -\sin\vartheta\, d\vartheta \\ 0 \rightarrow 1, \ \cos\pi \rightarrow -1 \end{array} \right.$$

es ergibt sich ein weiterer Faktor 2 da dasselbe für $\vec{e}_{\lambda(2)}$ gemacht wird

$$\sum_{\lambda} \left| \vec{d}_{12} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)} \right|^2 = \frac{8\pi}{3} \left| d_{12} \right|^2$$

Deltafunktion in $\omega = ck$ machen

alles einsammeln:

$$\boxed{\gamma_{rad} = \frac{|d_{12}|^2\,\omega_0^3}{6\pi\,\varepsilon_0\,c^3\,\hbar} \sim \omega_0^3\,|d_{12}|^2}$$

die betreffend Rate sind proportional zu ω_0^3 bzw d_{12}^2.

typisch Zeiten $\hat{=}$ 1 ps (10^{-12} s) bis 1 μs (10^{-6} s).

für Atom, HL usw.

Energieverschiebung δ_{rad} wird in dieser Theorie ∞.

$$\sum_k \frac{\omega_k - \omega_0}{\gamma^2 + (\omega_k - \omega_0)^2} \longrightarrow \infty$$