4.5.3 Störungstheorie zur Beschreibung der Wirkung des Photonvakuums auf elektronische Energien

ΔE_n (1 Elektron im Zustand n, wenn keine Photonen vorliegen) = ?

Erinnerung: Störungstheorie bis 2. Ordnung:

$$\Delta E_n = \langle \varphi_0 | H_{ww} | \varphi_0 \rangle + \sum_x \frac{|\langle \varphi_0 | H_{ww} | \varphi_x \rangle|^2}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_x}$$

für einen allgemeinen Elektron - Photonzustand

$|\varphi_0\rangle$ ist der ungestörte Zustand mit 1 Elektron in $|n\rangle$ des H-Atoms und keine Photonen in Umgebung.

$$|\varphi_0\rangle = \underbrace{\left|\begin{matrix} 1 & \cdots, n, n+1 & \cdots \\ 0 & 1 \quad 0 \quad 0 & 0 \; 0 \end{matrix}\right\rangle}_{\text{Besetzungszahl}} \underbrace{\left|\begin{matrix} k_1 \lambda_1(k_1), & k_1 \lambda_2(k_1), & k_2 \lambda_1(k_2) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \end{matrix}\right\rangle}_{\text{Photonvakuum}}$$

QZ

$|\varphi_x\rangle$ = alle mögl. anderen Zustände

$$H_{WW} \left(\vec{r} \cdot \vec{E} \text{ oder } \underline{\underline{\vec{p} \cdot \vec{A}}} \right) = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q\vec{A} \right)^2 \Big|_{\text{1. Quantisierung}}$$

Klein elektron. System

große λ_{Licht},

nicht geeignet f.

freies Elektron ($e^{i\vec{k}\vec{r}} = \infty$ ausgedehnt)

nehmen diese H

$$H_{WW} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \underbrace{\frac{q\vec{A}\cdot\vec{p}}{m}}_{\text{wesentlicher Term}} + \underbrace{\frac{q^2\vec{A}^{\,2}}{2m}}_{\text{trägt auch bei, aber macht nicht die wesentliche Physik}}$$

$$\vec{A} = \sum_{k\lambda} f_k \, \vec{e}_{\lambda(k)} \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} c_{\lambda k} + h.a.$$

$$H_{WW}^{(2)} = -\sum_{\substack{u_1 u_2 \\ \lambda k}} g_{u_1 u_2}^{k\lambda} \, a_{u_1}^{\dagger} a_{u_2} c_{\lambda k} + h.a.$$

Impuls $\vec{p}$, nicht $\vec{r}$

$$g_{u_1 u_2}^{k\lambda} = \frac{q}{m} \underbrace{(2\hbar\omega_k \varepsilon_0 V)^{-1/2}}_{f_k} \underbrace{\int d^3r \, \varphi_{u_1}^*(\vec{r}) \, \vec{e}_{\lambda(k)} \cdot \vec{p} \, \varphi_{u_2}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}}_{\vec{p}_{u_1 u_2}}$$

eine Vereinfachg. die die wesentliche Inhalte beibehält ist $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1$

1. Ordng. :

$$\sim \quad \underbrace{\left\langle {n \atop 1} \right|}_{\text{Elektr.}} \underbrace{\left\langle {k\lambda \atop 0} \right|}_{\text{Photon}} a^{+}_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k} \left| {k\lambda \atop 0} \right\rangle \left| {n \atop 1} \right\rangle$$

Vernichter c auf Nullphotonzustand $= 0$

Erzeuger c^{+} auf — " — $\longrightarrow \left| {k\lambda \atop 1} \right\rangle$,

ist orthogonal auf $\left\langle {k\lambda \atop 0} \middle| {k\lambda \atop 1} \right\rangle = 0$

$\Longrightarrow$ die erste Ordng. trägt nicht bei

2. Ordnung

$$|X\rangle = \left| {1 \quad n' \atop 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0} \right\rangle \underbrace{\left| {\cdots\, k\lambda \,\cdots \atop n_{k\lambda}} \right\rangle}_{\text{alle Photonzustände sind mögl.}}$$

und $n' \neq n$

$$\underbrace{\left\langle {n \atop 1} \right| \left\langle {k\lambda \atop 0} \right|}_{\varphi_0} a^{+}_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k} \,|X\rangle$$

1 Photon Zustände mögl.

$$\Delta E_n = \sum_x \frac{\left| \langle {}^n_1 | \langle {}^{k\lambda}_0 | a^+_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k} | x \rangle \, g^{k\lambda}_{n_1 n_2} \right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_x}$$

am End Summe über alle $n_1 n_2 \dots$

Energie des Zustands ψ_0 $\hat{=}$ Energie des Elektrons im H-Atom

Energie des Zustand mit beliebig Elektr n_2 + 1 Photon

(+) → gibt Null weil dann 2 Photon erzeugt werden

$$= \sum_{n_2 k\lambda} \frac{\left| \langle {}^n_1 | a^+_n a_{n_2} | {}^{n_2}_1 \rangle \langle {}^{k\lambda}_0 | c_{\lambda k} | {}^{k\lambda}_1 \rangle \, g^{k\lambda}_{n n_2} \right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n_2} - \hbar\omega_k}$$

$n_2 \to n'$

$$\Delta E_n = \sum_{\substack{n' \\ k\lambda}} \frac{\left| g^{k\lambda}_{nn'} \right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k}$$

Energieverschiebung eines elektronischen Zustands n durch die Moden λk des Photonenvakuums.

<u>konkrete Berechnung</u>: g_k einsetzen

$$\Delta E_n = \sum_{n'\lambda k} \frac{q^2}{m^2} \frac{1}{2\hbar\omega_k \varepsilon_0 V} \left| \vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)} \right|^2 \frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k}$$

$$= \sum_{n'} \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3} \int dk\, k^2 \underbrace{\sum_{\lambda} \int d\Omega}_{} \frac{|\vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{\lambda k}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k} \frac{q^2}{2\hbar\omega_k \varepsilon_0 \cancel{V} m^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{2\hbar \varepsilon_0 m^2 c^3} \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|\vec{p}_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega}$$

letzte VL

$k \to \omega$ als Integration

$$= \frac{1}{6\pi^2} \frac{q^2}{\hbar \varepsilon_0 m^2 c^3} \underbrace{\int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|\vec{p}_{nn'}|}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega}}_{}$$

für $\omega \to \infty$ $\quad \int_0^\infty d\omega\, \omega \frac{1}{\omega} \to \infty$

das würde einer ∞ Energiekorrektur entsprechen

→ hier ist was merkwürdig.

<u>Trick:</u> Bethe renormierung (H. Bethe '47)

nichtrelativistische Rechnung

<u>1) freie Elektron ansehen</u> → gibt auch ∞ Beitrag

analoge Formel aber $|n\rangle$ → $\underbrace{|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}_{}$

El. in Atom

freie Elektron

obige Formel gilt für beliebige Zustände

$$\underbrace{\langle n'|\vec{p}|n\rangle}_{\vec{p}_{nn'}} \rightarrow \langle k'|\vec{p}|k\rangle = \int d^3r \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}_r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$= \hbar\vec{k} \langle \vec{k}'|\vec{k}\rangle = \hbar\vec{k}\,\delta_{kk'}$$

$$\Delta E_{frei} = \underbrace{\frac{q^2}{6\pi^2 \hbar \varepsilon_0 m^2 c^3}} \int d\omega\,\omega \sum_{k'} \frac{(\hbar k)^2 \delta_{kk'}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - \hbar\omega}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}}{2} \int d\omega \frac{\cancel{\omega}}{-\hbar\cancel{\omega}} (\hbar k)^2$$

$$= -\frac{\bar{\alpha}}{2\hbar}(\hbar k^2) \int_0^\infty d\omega \rightarrow \infty$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \hbar^2 k^2$$

ist analog in der freien Dispersion der Schrödingergleichung

$$E_{frei} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Delta E_{frei} = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \alpha \frac{\hbar^2 k^2}{2}}_{\text{meßbare freie Energie}} \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{exp}}$$

Energie ohne Strahlungsfeld (ist nicht meßbar)

Idee: man setzt die Energiedispersion mit Strahlungskorrektur

= der experimentell zugänglichen Dispersion (m_{exp})

$$\rightarrow \frac{1}{m_{exp}} = \left(\frac{1}{m} - \alpha \right)$$

$$m_{exp} = \frac{m}{1 - \alpha m}$$

die nackte Elektronenmasse ohne Strahlungsfeld muß dafür sorgen daß man $m_{exp.}$ mißt $\alpha(m)$

Das Verfahren, den divergenten Anteil der Änderung der nackten Masse zur realen Masse umzuinterpretieren nennt man Massenrenormierung.

2) Anwendung auf gebundene Elektronen

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) + H_{ww}\ (\text{El - Photon})$$

nackte Masse Kern

ist schlechter Startpunkt, weil m unbekannt, $m \rightarrow m_{exp}$

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m_{exp}} + V(\vec{r}) + H_{ww}\ (\text{El-Ph}) + \underbrace{\frac{\alpha \vec{p}^{\,2}}{2}}$$

ist zusätzlich E-Korrektur ($\vec{p}^2$)

mit diesem H wird gerechnet,

aber E-Verschiebung mit $\frac{\alpha}{2}\vec{p}^2$ korrigiert werden

$$\Delta E_n = \frac{\alpha}{2} \left(\int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega} + \int_0^\infty d\omega \frac{\langle n|\vec{p}^2|n\rangle}{\hbar\omega} \right)$$

$\alpha(m_{exp})$

Korrektur f. ∞ der freien Elektronen

$$\langle n|\vec{p}^2|n\rangle = \sum_{n} \langle n|\vec{p}\underbrace{|n'\rangle\langle n'|}_{\text{vollständig Eins}}\vec{p}|n\rangle = \sum_{n'} (p_{nn'})^2$$

$$\Delta E_n = \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty d\omega\, \cancel{\omega} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega} + \frac{1}{\hbar\omega} \right)}_{\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega)\hbar\cancel{\omega}}}$$

Grenzfall $\omega \to \infty$ $\quad \int d\omega \frac{1}{\omega} \sim \ln\omega \Big|^\infty$

immer noch divergent aber nicht so schlimm wie $\int^\infty d\omega = \omega\Big|^\infty$

- ein relativistische Beschreibung sorgt für eine Obere Grenze des Integral die endlich ist:

$$\int^{\infty} d\omega \longrightarrow \int^{\frac{m_{exp} c^2}{\hbar}} d\omega$$

physikalisch Gründe: $(\omega \leq ck)$

Compton Wellenlänge $\lambda_c = \frac{h}{m_{exp} c}$ ist die maximal Lokalisierungslänge f. 1. Elektron

→ Photonimpulse oberhalb dieser $\frac{1}{\lambda_c}$ nicht mehr stark beitragen

$$\Delta E = \frac{\alpha}{2} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 (\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n) \underbrace{\ln \left| \frac{m_{exp} c^2}{\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n} \right|}$$

ln besteht aus $\int d\omega$

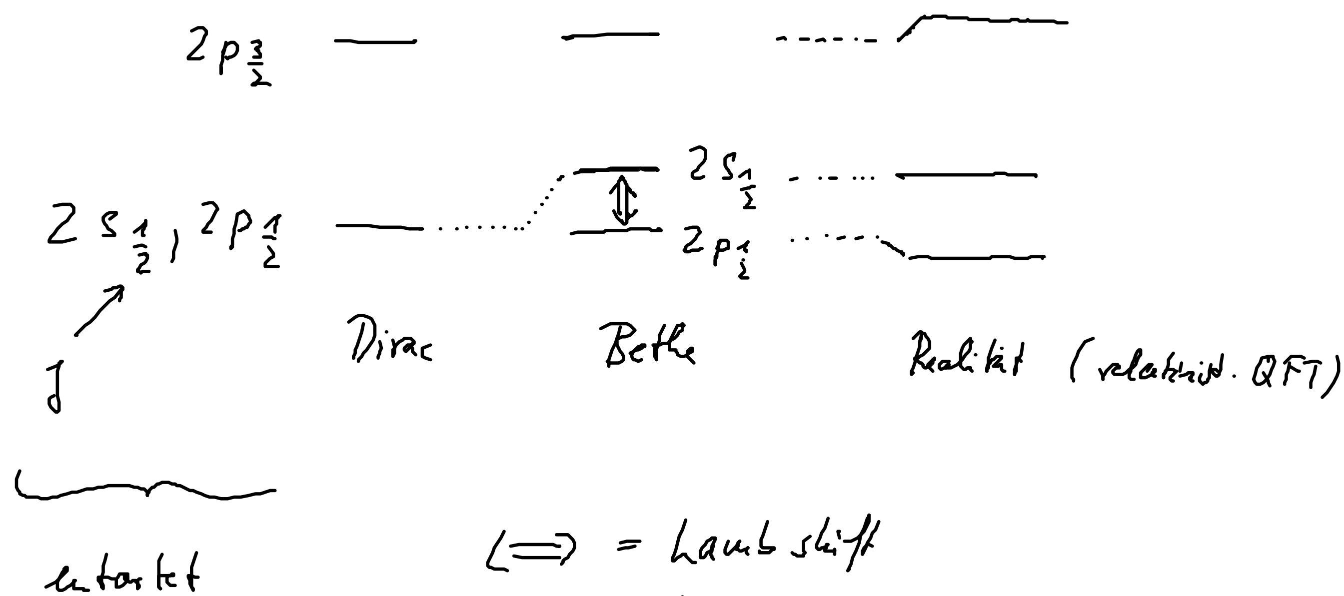
$\varepsilon_{n'} - \varepsilon_n << m_{exp} c^2$ ergibt weiter Vereinfach.

$$\boxed{\Delta E \sim |\varphi_n(\vec{r} = 0)|^2}$$

Es gibt durch das Strahlungsfeld verursachte E-Verschiebungen in H-Atom die proportional zu $|\varphi_n(\vec{r}=0)|^2$ sind.

Das ist für s-Zustände der Fall.

<u>H - Atom</u> $\quad n=2$



$\Longleftrightarrow$ = Lamb shift
Lamb verschiebung
('48 Lamb)