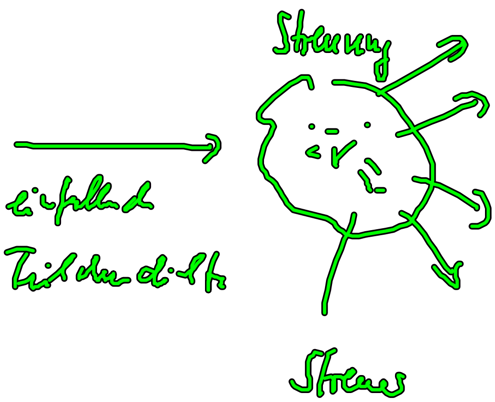
1.5. Streuprozesse

Experimentalphysik Def. Streuwirkungsquerschnitt σ

$$\sigma = \frac{\text{Zahl der Streuungen pro Zeiteinheit und Streuer}}{\text{einfallende Teilchenstromdichte}}$$

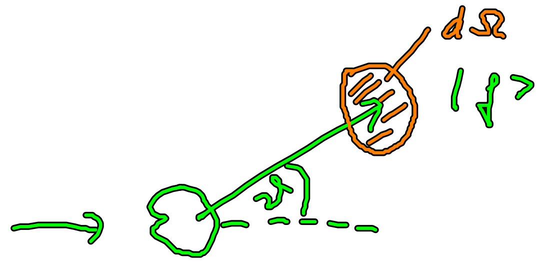


σ hat Einheit einer Fläche:

$$[\sigma] = \frac{1}{[t]\left[\frac{dN}{dt\,dA}\right]} = \underline{\underline{m^2}}$$

<u>σ</u>: Fläche die ein Streuer einem punktförmigen klassischen Teilchen entgegenstellen müsste damit jedem Streuprozess ein klassischer Treffer entspricht

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der Streuung. an } \vartheta}{\text{Raumwinkel um } \vartheta}$$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{W_{if}}{j_0} = \frac{\text{Wahrscheinlichkeit pro Zeit, daß } |i\rangle \text{ und } |f\rangle \text{ gestreut wird}}{\text{Einfallende Stromdichte}}$$

W_{if} muß von S_{if} abhängen

S_{if} Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude

$$S_{if} = \langle i | \underline{U}_{ww}(t,t') | f \rangle \Big|_{t,t' \to \pm\infty}$$

$$W_{if} = \frac{d}{dt} |S_{if}|^2 \Big|_{t,t' \to \pm\infty}$$

in erster Ordng. ist die Fermis Goldene Regel f. W_{if}

(Wahrscheinlichkeit pro Zeit $|i\rangle \to |f\rangle$ unter dem Einfluß der Streuung)

<u>S_{if} in 1. Ordng. :</u>

$$S_{if} = \delta_{if} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t'}^{t} dt'' \, \langle i | \underline{H}_{WW}(t'') | f \rangle \qquad \Bigg| \; t, t' \to \pm\infty$$

ohne WW (nullter Term der Reihe) — linear in WW — später

$$\frac{d}{dt}|S_{if}|^2 = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d}{dt}\left(\int_{t'}^{t} dt_1 \, \langle i | \underline{H}_{WW}(t_1) | f \rangle \int_{t'}^{t} dt_2 \, \langle f | H_{WW}(t_2) | i \rangle\right)$$

Produktregel

$$= \frac{1}{\hbar^2}\Bigg(\langle i | \underline{H}_{WW}(t) | f \rangle \int_{t'}^{t} dt_2 \, \langle f | \underline{H}_{WW}(t_2) | i \rangle +$$

$$\int_{t'}^{t} dt_1 \, \underbrace{\langle i | \underline{H}_{WW}(t_1) | f \rangle}_{\text{Schrödingerbild (S)}} \; \langle f | \underline{H}_{WW}(t) | i \rangle \Bigg)$$

$$\langle i | e^{i\frac{H_0}{\hbar}t_1} H_{WW}^{S} e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t_1} | f \rangle = \langle i | H_{WW}^{S} | f \rangle \, e^{i\frac{\varepsilon_i}{\hbar}t_1} e^{-i\frac{\varepsilon_f}{\hbar}t_1}$$

da $H_0 | i \rangle = \varepsilon_i | i \rangle$ (vor der Streuung)

$$= \frac{|\langle i | H_{WW}^{S} | f \rangle|^2}{\hbar^2}\int_{t'}^{t} dt_2 \, e^{i\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_f}{\hbar}t} e^{-i\frac{\varepsilon_i-\varepsilon_f}{\hbar}t_2} + \text{k.c.}$$

$s = t - t_2$

$ds = -dt_2$ } tausch

o Grenze: $t - t = 0$

u Grenze: $t - t' \to \infty$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \frac{|\langle i | H^S_{ww} | f \rangle|^2}{\hbar^2} \underbrace{\int_0^{\infty} ds \left(e^{i(\omega_i - \omega_f)s} + e^{-i(\omega_i - \omega_f)s} \right)}_{\int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{+i(\omega_i - \omega_f)s}}$$

$s \to -s$

$$W_{if} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \delta(\omega_i - \omega_f) |\langle i | H^S_{ww} | f \rangle|^2$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) |\langle i | H^S_{ww} | f \rangle|^2$$

(Fermis goldene Regel)

1.5.1. Streuung eines Teilchens am Potential ($V(\vec{r})$)

$$H_{ww}^{S} = V(\vec r) \xrightarrow{2.\ \text{Quantiz.}} \int d^3r\, \psi^\dagger(\vec r,t)\, V(\vec r)\, \psi(\vec r,t)$$

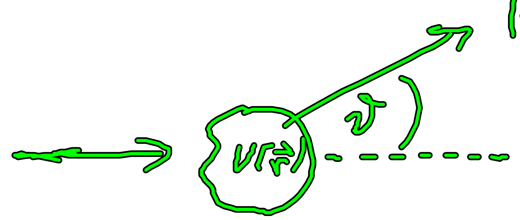
konstantes klassisches Potential (Atomkern)

$$\psi(\vec r,t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{i\vec k\cdot\vec r}\, a_k(t)$$

$$H_{ww}(t) = \sum_{kk'} V_{kk'}\, a_k^\dagger(t)\, a_{k'}(t)$$

$$V_{kk'} = \frac{1}{V}\int d^3r\, e^{-i\vec k\cdot\vec r}\, V(r)\, e^{i\vec k'\cdot\vec r}$$

Situation :



$|f\rangle = a^\dagger_{k_f}|0\rangle$

(1 Elektronenzustand in k_f)

$|i\rangle = a^\dagger_{k_i}|0\rangle$

(1 Elektronenzustand in k_i)

1) $\langle i| H_{ww}^S |f\rangle = ?$ 2) $\delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) = ?$

um W_{if} zu berechnen :

1.) $\langle i | H_{WW}^S | f \rangle = \langle 0 | a_{k_i} \sum_{kk'} V_{kk'} a_k^+ a_{k'} a_{k_f}^+ | 0 \rangle$

$$\Big(\langle 0 | a_{k_i} a_k^+ \underbrace{a_{k'} a_{k_f}^+}_{\substack{(\delta_{k'k_f} - a_{k_f}^+ a_{k'}) \\ \text{für Fermionen}}} | 0 \rangle = \langle 0 | a_{k_i} a_{k_f}^+ \delta_{k'k_f} | 0 \rangle + 0$$

Vernichtungsoperator $|0\rangle = 0$

$$= \delta_{k'k_f} \, \delta_{k_i k_f} \Big)$$

$$\langle i | H_{WW}^S | f \rangle = V_{k_i k_f}$$

2) $\delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) = \delta\left(\frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} \right)$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \delta(k_i^2 - k_f^2) = \frac{2m}{\hbar^2} \delta\big((k_i + k_f)(k_i - k_f) \big)$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2 (k_i + k_f)} \delta(k_i - k_f)$$

Betrag der Wellenzahl nicht verändert

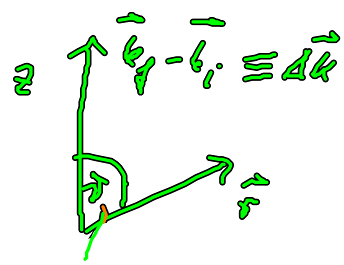
(elastischer Stoß)

Was ist $V_{k_i k_f} = ?$

$$V_{k_i k_f} = \frac{1}{V}\int d^3r\, e^{-i\vec{k}_i\cdot\vec{r}}\, V(\vec{r})\, e^{i\vec{k}_f\cdot\vec{r}}$$

$$= \frac{1}{V}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \int_0^{\infty} dr\, r^2\, V(|\vec{r}|) \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\, e^{i(\vec{k}_f-\vec{k}_i)\cdot\vec{r}}$$

radialsymmetrisch (Annahme)



Integration in Kugelkoordinaten.

$$= \frac{2\pi}{V}\int_0^{\infty} dr\, r^2\, V(r) \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta\, e^{i\Delta k\, r\cos\vartheta}}_{\underbrace{\int_{-1}^{1} dx\, e^{i\Delta k\, r\, x}}_{\frac{2\sin(\Delta k\, r)}{\Delta k\, r}}}$$

Skalarprodukt

$x = \cos\vartheta$

$$= \frac{4\pi}{V} \int_0^\infty dr\, r \frac{V(r)}{\Delta k} \sin(\Delta k r)$$

Yukawa-Potential

$$V(r) = \alpha \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

Modell

abgeschirmtes Coulombpotential der Stärke α mit λ^{-1} als Abschirmlänge

nachschlagen

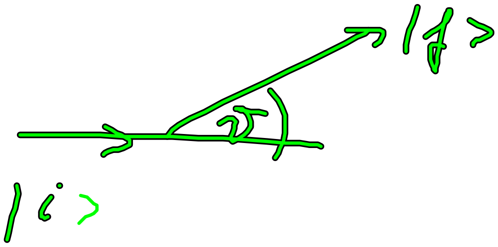
$$= \frac{4\pi\alpha}{V \Delta k} \int_0^\infty dr\, e^{-r\lambda} \sin(\Delta k r) = \frac{4\pi\alpha}{V \cancel{\Delta k}} \frac{\cancel{\Delta k}}{\Delta k^2 + \lambda^2}$$

reine Coulomb: $\lambda \to 0$ $\hat{=}$ Rutherfordstreuung

alle zusammen um w_{if} zu berechnen:

$$w_{if} = \frac{|V_{k_i k_f}|^2}{\hbar} 2\pi \frac{2m}{\hbar^2 (k_i + k_f)} \delta(k_i - k_f)$$

$$= \hat{\alpha} \frac{\delta(k_i - k_f)}{|\vec{k}_i - \vec{k}_f|^4}$$



$$= \tilde{\alpha} \; \frac{\delta(k_i - k_f)}{\left| k_i^2 + k_f^2 - 2\vec{k}_i \cdot \vec{k}_f \right|^2}$$

$$= \tilde{\alpha} \; \frac{\delta(k_i - k_f)}{k_i^4 \, \underbrace{\left| 2 - 2\cos\vartheta \right|^2}} \;\propto\; \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

<u>Bemerkg.</u>

1) 1. Ordng: „Bornsche Näherung"

2) Exp. physik: Rutherfordstreuung zur Bestimmung d. Kernpotentials

3) divergent f. $\vartheta \to 0$ (Störungstheorie)

1.5.2. Streuung v. Elektron u. Photon

$$H_{WW} = \frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} \;\xrightarrow{\text{2. Quantisierung}}\; \frac{q}{m} \int d^3r \; \psi^+(\vec{r},t) \; \vec{p} \cdot \vec{A} \; \psi(\vec{r},t)$$

$$\vec{A} = \sum_{q\lambda} \int_q \vec{e}_\lambda(q) \, c_{\lambda q}(t) \, e^{i\vec{q}\vec{r}} + h.a.$$

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k e^{i\vec{k}\vec{r}} \, a_k(t)$$

$$H_{ww} = \frac{q}{mV}\sum_{\substack{qkk'\\ \lambda}} f_q \left(\int d^3r\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \underbrace{\frac{\hbar}{i}\vec{p}\, e^{i\vec{k}'\vec{r}}}_{\hbar\vec{k}'}\, \cancel{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}} \cdot \vec{e}_{\lambda q} \right)$$

$$a^+_k\, a_{k'}\, c_{q\lambda} + h.a.$$

$$= \frac{q}{mV}\sum_{\substack{qkk'\\ \lambda}} f_q\, \delta(\vec{k}' - \vec{k} + \vec{q})\, \hbar\vec{k}'\cdot\vec{e}_{q\lambda}\; a^+_k\, a_{k'}\, c_{q\lambda} + h.a.$$

Situation: $|i\rangle = a^+_{k_i}|0\rangle$ $\qquad |f\rangle = a^+_{k_f}\, c^+_{q_f\lambda_f}|0\rangle$

Kann Zustand mit $|k_i\rangle$ ein Photon emittieren

1) $\langle i|H^S_{ww}|f\rangle = ?$ $\qquad$ 2) $\delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) = ?$

u.a.: $\underbrace{\langle 0|\, a_{k_i}}_{\langle i|}\; \underbrace{a^+_k\, a_{k'}\, c_{q\lambda}}_{H_{ww}}\; \underbrace{a^+_{k_f}\, c^+_{q_f\lambda_f}|0\rangle}_{f} = \ldots$

$$= \delta_{k_i k}\, \delta_{k_f k'}\, \delta^{\lambda \lambda_f}_{q q_i}$$

nach Auswertg.:

$$W_{if} \sim \underbrace{\delta\left(\vec{k}_i - \vec{k}_f - \vec{q}_f\right)}_{\text{Impulserhaltg.}}\ \underbrace{\delta\left(\frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} - \underbrace{\hbar\omega_{q_f}}_{\text{Photon}}\right)}_{\text{Energieerhaltg.}}$$

$$\vec{k}_i = \vec{k}_f + \vec{q}_f$$

einfallender Impuls spaltet sich auf in $\vec{k}_f$ und Photonimpuls $\vec{q}_f$

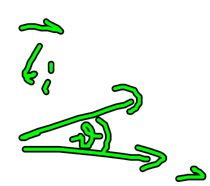
- beide δ-Fkt. können nicht gleichzeitig erfüllt werden:

es gibt kein Photonemission durch ein laufende ebene Welle:

- man kann niemals gleichzeitig E- und Impulserhaltg. realisieren:

$$\delta\left(\underbrace{\frac{\hbar^2 k_i^2}{2m} - \frac{\hbar^2 (\vec{k}_i - \vec{q}_f)^2}{2m} - \hbar\omega_{q_f}}_{\text{müßte Null sein}}\right)$$

ist es aber nie:



$$q_f$$

$$= \delta\left(\frac{\hbar^2 k_i q_f \cos\vartheta}{m} - \frac{\hbar^2 q_f^2}{2m} - \hbar\omega_{q_f}\right)$$

$$\propto \frac{m}{\hbar^2 k_i q_f}\left(\cos\vartheta - \frac{1}{2}\frac{\omega_{q_f}}{m v_i/\hbar} - c\,\cancel{q_f}\,\frac{\cancel{m}}{\cancel{m} v_i \cancel{q_f}}\right)$$

$\hbar k_i = m v_i$ als Geschwindigkeit

Wann wird das Argument Null?

$$\cos\vartheta = \frac{c}{v_i} + \underbrace{\frac{\hbar\omega_q}{2mvc}}_{>1}$$

$$\frac{\text{Lichtgeschwindigkeit}}{\text{Teilchengeschwindigkeit}} > 1$$

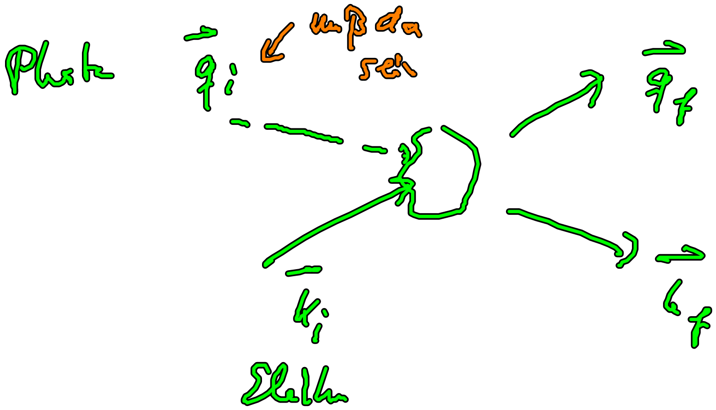
Kosinus $\in [-1, +1] \longrightarrow \nexists$ kein Lösg.

Medium $c \to c' = \frac{c}{n}$ Cherenkov-Effekt:

Brechzahl

dann kann das Elektron abstrahlen.

letzter Kontakt: $\vec{A}^2$ in H_{WW}



Thomsonstreuung ist mgl.