

W_h:

Betrachte System aus N Punktladungen

Potential Φ Energie W^S des Gesamtsystems

$\hat{=}$ Arbeit, die man aufwenden muss, um die

Ladung q_i aus dem Unendlichen Z_{∞} da Arbeit $\hat{=}$ Z_{∞} bringt

Anfangssituation: Raum ist zunächst (via Einbringen der Ladung) feldfrei $\Rightarrow \Phi^{\text{Anfang}} = 0$

$W^S = W_1 + W_2 + \dots + W_N$ Summe aller Arbeiten, um die q_i heranzubringen!

W_1 : Arbeit, um q_1 nach \underline{r}_1 zu bringen

$W_1 = 0$, da $\Phi^{\text{Anfang}} = 0$

W_2 : Arbeit, um q_2 in dem von

q_1 erzeugten Feld nach \underline{r}_2

zu bringen

$$W_2 = q_2 \underbrace{\Phi_1(\underline{r}_2)}$$

Potential, welches von q_1 bei \underline{r}_2 erzeugt wird

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$$

analog:

$$W_3: q_3 (\Phi_1(x_3) + \Phi_2(x_3)) = q_3 \sum_{j=1}^2 \frac{q_j}{|x_3 - x_j|} \frac{1}{\sqrt{\pi \sigma_0}}$$

$$W_N = q_N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{\sqrt{\pi \sigma_0} |x_N - x_j|}$$

Grenzwert:

$$\begin{aligned} W^S &= \sum_{i=1}^N W_i = \sum_{i=2}^N W_i \\ &= \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{\sqrt{\pi \sigma_0} |x_i - x_j|} \quad (*) \end{aligned}$$

Beachte:

$$W_{ij} = W_{ji}$$

Damit folgt:

$$W^S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_i q_j}{\sqrt{\pi \sigma_0} |x_i - x_j|} \quad (*)$$

keine Diagonalelemente!

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Ladungsverteilungen

$$\text{ersetze } \sum_i q_i \rightarrow \int dx \rho(x)$$

Damit ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} \int d\underline{r} \int d\underline{r}' \frac{g(\underline{r})g(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'| 4\pi\epsilon_0}$$

Beachte:

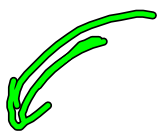
Im Unterschied zur Formel für W_S wird in W über alle Beiträge "summiert"; Beiträge der Wechselwirkung

.. von Ladungen mit sich selbst werden nicht ausgeschlossen!

→ "Selbstenergie"

Dies sieht man, wenn man folgende annimmt.

$$g(\underline{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$



$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N q_i q_j \int d\underline{r} \int d\underline{r}' \frac{\delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \delta(\underline{r}' - \underline{r}_j)}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \neq W^S \quad !!$$

hier treten auch Dreiecksterme auf! Dazu später.

Zurück zum Ausdruck für W
(für kontinuierliche Verteilungen)

Ziel: Umformen, das Potential bzw. Feld aufzuheben

$$W = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{4\pi \epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

benutze: $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int d\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$

$$= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})$$

benutze: $\Delta_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int d\mathbf{r} \Delta_{\mathbf{r}} \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})$$

benutze $\nabla \cdot \phi$

$$\Delta \phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi \cdot \phi$$

$$= \operatorname{div} (\operatorname{grad} \phi \cdot \phi)$$

$$- \operatorname{grad} \phi \cdot \operatorname{grad} \phi$$

$$\Rightarrow W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \nabla \cdot (\nabla \phi(\underline{r}) \cdot \phi(\underline{r})) + \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \phi(\underline{r}))^2$$

1. Integral: Gauß'sche Integralformel

$$\int_V dV \nabla \cdot (\nabla \phi(\underline{r}) \cdot \phi(\underline{r})) = \int_{\partial V} dF (\phi(\underline{r}) \nabla \phi(\underline{r}))$$

$$\int_{\partial V} dF (\phi(\underline{r}) \nabla \phi(\underline{r}))$$

(Oberflächenintegral "im Unendlichen")

Integral:

$$\phi \sim \frac{1}{r}$$

$$\nabla \phi \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\text{Flächenelement } dF \sim r^2$$

$$\left. \begin{array}{l} \sim \frac{1}{r} \\ \frac{\sim \frac{1}{r}}{r^2} \\ \text{verschwindet} \\ \text{für } r \rightarrow \infty! \end{array} \right\}$$

\Rightarrow Oberflächenintegral verschwindet!

$$\Rightarrow W = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (\nabla \phi(\underline{r}))^2$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV (E(\underline{r}))^2$$

oder

$$W = \int dV w(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad w(\underline{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} (E(\underline{r}))^2$$

↑
elektrost. Energiedichte

↓
Feldenergie

Bemerkungen

a) W ist offensichtlich positiv definit !

— hieraus "sieht" man wieder die Tatsache, daß W Anteil der Selbstenergie enthält !

Denk für Punktladung (Formel für W^S) könnte sich auch etwas Negatives ergeben

b) nochmal zum Selbstenergieproblem

i) Betrachtet Punktladung bei $r=0$

$$\Rightarrow \underline{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow w(r) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

Energiedichte

Annahme: Es gibt nur diese eine Ladung!

$$W = W^{\text{Selbst}} = \int d\underline{v} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$= 4\pi \frac{\epsilon_0}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr \underbrace{r^2 \frac{1}{r^4}}_{r^{-2}}$$

divergiert am unteren Rand
 $r \rightarrow 0$!

(r) Betrachtet homogen geladene
 Vollkugel bei $r=0$ und Radius
 mit Schwerpunkt $R > 0$

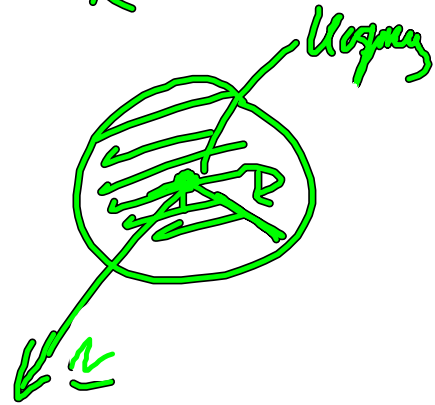
$$E(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon_0}} \left(\frac{Q}{r^3} \right)^{\frac{n}{2}} \quad , \quad n < 2$$

$$\frac{Q}{r^2} \quad , \quad n = 2$$

man ~~selbst~~ findet.

$$W = W^{\text{selbst}} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{\sqrt{\pi \epsilon_0} R}$$

endlich für alle $R > 0$!



Divergenzen (für die Selbstenergie)

treten also nur für den

„pathologische“ Fall der Punktladung auf.

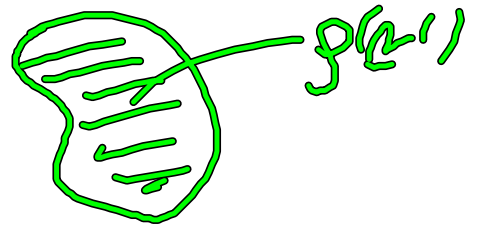
Reale, ausgedehnte Ladungsverteilung haben endlich Selbstenergie

→ gesamte Feldenergie W bleibt endlich!

II.5. Multipolentwicklung

Betrachte eine räumliche begrenzte
Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$

(z.B. Molekül)



Potential (verursacht durch zwei Platten)

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\underline{r}'} \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

l.a. schwierig auszurechnen (außer bei sehr einfacher,
symmetrischer Ladungsverteilung)

Häufig interessiert man sich nur
für $\Phi(\underline{r})$ bzw. $\underline{E}(\underline{r})$ weiter
weg von der Ladungsverteilung

⇒ Multipolentwicklung

Ausgangspunkt!

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

betrachtet durch Fld. genau

Wir legen das Zentrum der Verteilung $\rho(\underline{r}')$ an den Ort $\underline{r}' = 0$



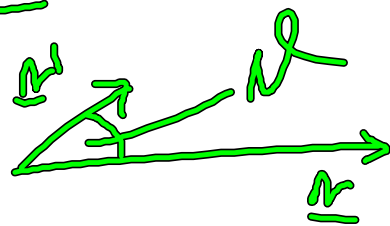
→ "Wert weg" von der Ladungsverteilung bedeutet, dass wir uns für Orte \underline{r} interessieren, bei denen $\underline{r} \rightsquigarrow \underline{r}'$

Strategie:

Entwickle die Funktion $\frac{1}{|r-r'|}$

nach Potenzen von $\frac{r'}{r} \ll 1$

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{\sqrt{(r-r')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \vartheta}}$$



$$= \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos \vartheta}}$$

Taylorentwicklung in Potenzen von $\frac{r'}{r}$ (mit $\frac{r'}{r} = 0$)

man findet

$$\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r} \left(1 + \overset{P_0(\cos \vartheta)}{\cos \vartheta} \frac{r'}{r} + \overset{P_2(\cos \vartheta)}{\dots} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(3 \cos^2 \mu - 1) \left(\frac{r'}{r}\right)^3 + \dots}{P_2(\cos \mu)}$$

Diese Entwicklungskoeffizienten sind Legendrepolynome!

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \mu)$$

~~mit $P_l(x) = \frac{1}{l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (1 - 2x + x^2)^{\frac{l-1}{2}}$~~

$$P_l(x) = \frac{1}{l!} \left[\frac{\partial^l}{\partial x^l} (1 - 2x + x^2)^{\frac{l-1}{2}} \right]_{x=0}$$

Elektrostatisches Potential

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\tau' \frac{\rho(r')}{|r - r'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \int d\tau' \rho(r') \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \mu) \end{aligned}$$

für Orte r
außerhalb der
Ladungsverteilung

Integral über das Gebiet,
in dem $\rho(r') \neq 0$!

Definiere:

$$Q_l = \int d\mathbf{r}' r'^l f(\mathbf{r}') P_l(\cos\theta)$$

l-tes Multipolmoment des Potentials!

$$\Rightarrow \Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l r^{-l-1}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_0}{r} + \frac{Q_1}{r^2} + \frac{Q_2}{r^3} + \dots \right)$$

Entwicklung des Potentials in Potenzen von $\frac{1}{r}$

„Multipolentwicklung“

Behandlung der führenden Terme

• l=0

„Monopolmoment“

$$Q_0 = \int d\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}')$$

(da $P_0(x) = 1$)

Gesamtladung zur Verteilung $\rho(r)$

dann: $Q_0 = 0 \stackrel{!}{=} \text{Verteilung ist insgesamt neutral!}$

Monopolpotential



$$\Phi^{(Q=0)}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_0}{r}$$

Interpretation:

Weshalb wird von der Ladungsverteilung sich diese aus,

wie eine Punktladung mit Ladung Q_0 !

• Q_1 :

$$Q_1 = \int d\tau \rho(r') \underbrace{r' \cos \theta}_{P_1(\cos \theta)}$$

$$\text{benutze: } \cos \theta = \frac{r \cdot r'}{r \cdot r'}$$

$$Q_1 = \int d\tau' \rho(r') \frac{r' \cdot r}{r}$$

Definition:

$$p = \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \underline{r}'$$

Vektor!

Dipolmoment der Ladungsverteilung

$$\Rightarrow Q_1 = \frac{p \cdot \underline{r}}{r} = p \cdot \hat{\underline{r}}$$

Erhaltung in \underline{r} -Richtung

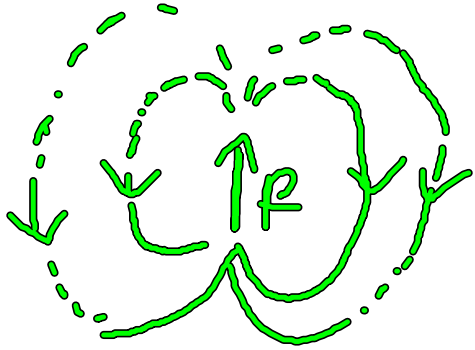
Zugehöriges Potential (Dipolpotential)

$$\Phi^{(Q=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \underline{r}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

Wichtigste Terme für magnetische Körper!

$$\underline{E}^{(Q=1)}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \Phi^{(Q=1)}(\underline{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} (3(p \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 p)$$



Dipolfeld!

(we kein magnetisches
Dipol!)

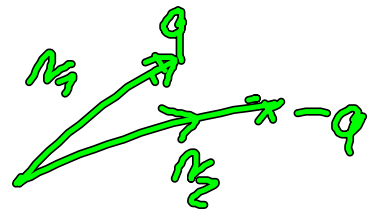
Beispiel:

2 Punktladungen $q_1 = q$, $q_2 = -q$ bei $\underline{r}_1, \underline{r}_2$

$$g(\underline{r}) = q d(\underline{r} - \underline{r}_1) - q d(\underline{r} - \underline{r}_2)$$

Monopol

$$Q_0 = \int d\underline{r}' g(\underline{r}') = q - q = 0$$



Dipolmoment:

$$\underline{p} = \int d\underline{r}' g(\underline{r}') \underline{r}' = q(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

Verbindungsvektor!