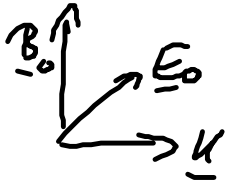


Wh: $\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 \exp[i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)]$

$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 \exp[i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)]$

$\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0$; $\underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0$; $\underline{B}_0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0 \right)$



Z.B.: $\underline{k} = k \hat{e}_z \rightarrow \underline{E}(\underline{r}, t) = (E_{0x} \hat{e}_x + E_{0y} \hat{e}_y) \cdot e^{i(kz - \omega t)}$

$\underline{B}(\underline{r}, t) = \frac{1}{c} (-E_{0y} \hat{e}_x + E_{0x} \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$

V.B. Polarisation ebene Welle

betrachte wieder Welle mit $\underline{k} = k \hat{e}_z$

$\underline{E}(\underline{r}, t) = (E_{0,x} \hat{e}_x + E_{0,y} \hat{e}_y) e^{i(kz - \omega t)}$

Die Amplituden $E_{0,x}$ und $E_{0,y}$ sind i.a. komplex!

$E_{0,x} = a_x e^{i d_x}$

$E_{0,y} = a_y e^{i d_y}$

a_x, a_y, d_x, d_y reell

Beachte: Das physikalische E-Feld ist reell!

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = E_x(\underline{r}, t) \underline{\hat{e}}_x + E_y(\underline{r}, t) \underline{\hat{e}}_y$$

$$\Rightarrow E_x^{(\underline{r}, t)} = \text{Re} (E_{0,x} e^{i(kz - \omega t)}) \\ = \text{Re} (a_x e^{i d_x + i(kz - \omega t)})$$

$$\textcircled{1} = a_x \cos(\underbrace{kz - \omega t}_{\varphi} + d_x)$$

analog

$$E_y(\underline{r}, t) = \text{Re} (E_{0,y} e^{i(kz - \omega t)})$$

$$\textcircled{2} = a_y \cos(\underbrace{kz - \omega t}_{\varphi} + d_y)$$

$$\Rightarrow \textcircled{1}: \frac{\underline{E}_x}{a_x} = \cos(\varphi + d_x) = \cos \varphi \cos d_x - \sin \varphi \sin d_x$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\underline{E}_y}{a_y} = \cos \varphi \cos d_y - \sin \varphi \sin d_y$$

Eliminiere nun die Abhängigkeit
von φ und damit die
Orts- und Zeitabhängigkeit!

$$\Rightarrow \frac{\bar{E}_x}{a_x} \sin d_y - \frac{\bar{E}_y}{a_y} \sin d_x$$

$$= \cos \varphi \cos d_x \sin d_y - \sin \varphi \sin d_x \sin d_y$$

$$- \cos \varphi \cos d_y \sin d_x + \sin \varphi \sin d_y \sin d_x$$

$$\textcircled{I} = \cos \varphi \sin(d_y - d_x)$$

$$\text{analog: } \frac{\bar{E}_x}{a_x} \cos d_y - \frac{\bar{E}_y}{a_y} \cos d_x = \sin \varphi \sin(d_y - d_x) \textcircled{II}$$

führe ein:

$$d = d_y - d_x$$

$$\textcircled{I}^2 + \textcircled{II}^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\bar{E}_x}{a_x} \right)^2 + \left(\frac{\bar{E}_y}{a_y} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{E}_x}{a_x} \right) \left(\frac{\bar{E}_y}{a_y} \right) \cos d$$

$$\textcircled{*} = \sin^2 d$$

mit d : Phasendifferenz zw. x - und y -Komponente des \underline{E} -Feldes!

mathematisch ist die Gleichung
eine Ellipsengleichung!

Spezialfälle

a) Lineare Polarisation

$$d = d_y - d_x = 0 \quad \text{oder} \quad d = \pm \pi$$
$$\Rightarrow \sin d = 0, \quad \cos d = \pm 1$$

aus (*)

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 \pm 2\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{E_x}{a_x} \pm \frac{E_y}{a_y} = 0}$$

Aussage
unabhängig von
Zeit und Ort!

Wir hatten als Ansatz:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = E_x(\underline{r}, t) \underline{e}_x + E_y(\underline{r}, t) \underline{e}_y$$
$$= a_y \cos(\varphi + d_x) \underline{e}_x$$

$$+ a_y \cos(\varphi + \delta_y) \underline{\hat{e}}_y$$

mit linearer Polarisation

$$\varphi = kz - \omega t$$

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = (a_x \underline{\hat{e}}_x \pm a_y \underline{\hat{e}}_y) \cos(kz - \omega t + \delta_x)$$

Interpretation: Der Vektor $\underline{E}(\underline{r}, t)$ schwingt in fester Richtung relativ zu \underline{k}

b) Zirkular polarisierte Welle

$$\delta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \delta = \pm 1, \quad \cos \delta = 0$$

nehme zusätzlich an, daß $a_x = a_y = a$

$$\rightarrow \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{E_x^2 + E_y^2 = a^2}$$

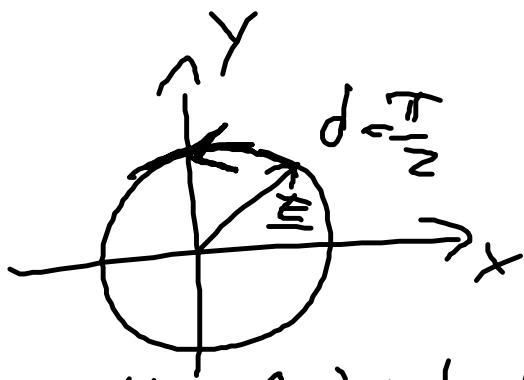
\underline{E} -Feld bewegt sich also auf einem Kreis! Kreingleichung!

Gesamtfeld:

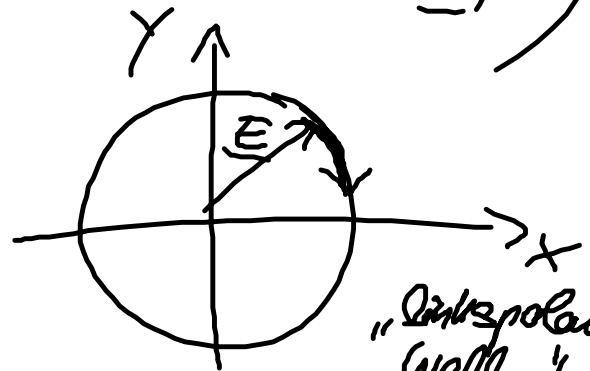
$$\underline{E}(\underline{r}, t) = a \cos(kz - \omega t + d_x) \underline{\hat{e}}_x$$

$$\pm a \cos(kz - \omega t + d_x + \frac{\pi}{2}) \underline{\hat{e}}_y$$

$$= a \left(\cos(kz - \omega t + d_x) \underline{\hat{e}}_x \right. \\ \left. \pm \sin(kz - \omega t + d_x) \underline{\hat{e}}_y \right)$$



„rechtspolarisierte Welle“



„linkspolarisierte Welle“

Bemerkungen:

– Zirkular polarisierte Wellen

können als Überlagerung von 2 linear polarisierten Wellen, die um $\frac{\pi}{2}$ verschoben sind, betrachtet werden!

- Alle anderen Fälle (als den Fall linear und zirkulärer Polarisation) nennt man elliptische Polarisation

V. 4. Energie elektromagnetischer Wellen

Betrachte ^{reelle} Wellen

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$$

↑
reell

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$$

↑
reell

mit $\underline{B}_0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0 \right)$

Energiedichte

$$w(\underline{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0} (\underline{B}(\underline{r}, t))^2$$

$$= \frac{\epsilon_0}{2} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$\xrightarrow{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}} \epsilon_0 (\underline{E}(\underline{r}, t))^2$$

Zugehörige Energiestromdichte
(Poynting-Vektor)

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = \underline{E} \times \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$$

$$\boxed{\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}}$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} (\underline{E} \times \left(\frac{c}{\mu} \times \underline{E} \right))$$

$$\Rightarrow \underline{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\underline{E}(\underline{r}, t))^2 \cdot \frac{c}{\mu}$$

Kombiniere das mit dem Ausdruck für die Energiedichte

$$\boxed{S(\underline{r}, t) = c \, w(\underline{r}, t) \frac{\underline{k}}{k}}$$

Interpretation:

Im Vakuum (Keine Ladungen, keine Ströme) wird die Energie mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung des Wellenvektors transportiert!

V. 5. Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Bisher haben wir nur die Ausbreitung von Wellen im Vakuum diskutiert, nicht aber ihre Erzeugung!

Erzeugung

↔ zeitabhängige Ladungen
und Ströme

Betrachte dazu die Gleichungen für die elektromagnetischen Potentiale $\underline{\Phi}(\underline{r}, t)$ und $\underline{A}(\underline{r}, t)$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}, t)$$

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = -\nabla \Phi(\underline{r}, t) - \underbrace{\dot{\underline{A}}(\underline{r}, t)}_{\frac{\partial \underline{A}(\underline{r}, t)}{\partial t}}$$

$$\text{Lorentz-Eichung: } \nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} = 0$$

Damit:

$$\square \Phi(\underline{r}, t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}, t)$$

$$\square \underline{A}(\underline{r}, t) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r}, t)$$

Potentialgleichungen
in der Lorentz-Eich.

"inhomogene
Wellengleichungen!"

$$\text{mit } \square = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Aufgabe: Lösung dieser Gleichung für gegebene Ladungen und Ströme!

Annahme: Keine Randbedingungen,

außer $\Phi, \underline{A} \rightarrow 0$

für $r \rightarrow \infty$

↖ Abstand von den
Ladungs- und
Stromverteilungen

V, 5.1. Formale Lösung

Wir benutzen das Konzept der Greenschen Funktionen
— wie in der Elektrostatik!

Erinnerung Elektrostatik.

$$\Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})$$

Poisson-Gleichung

Lösung:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d\underline{r}'$$

$$= \int d\underline{r}' g(\underline{r} - \underline{r}') \rho(\underline{r}')$$

Faltung im Raum

$$\text{mit } g(\underline{r} - \underline{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

es gilt,

$$\Delta_{\underline{r}} g(\underline{r} - \underline{r}') = -\frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{d|\underline{r} - \underline{r}'|}_{\text{Ladungsdichte einer Einheits-Punktladung}}$$

(Ladungsdichte einer
Einheits-Punktladung)

Dynamischer Fall

$$\text{Sei } u(\underline{r}, t) = \phi(\underline{r}, t) \text{ oder } \underline{u}(\underline{r}, t) = \underline{A}(\underline{r}, t)$$

$$\text{Sei } f(\underline{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}, t) \text{ oder } f(\underline{r}, t) = \mu_0 \overset{\uparrow}{j}(\underline{r}, t) \text{ des Vektorpotentials}$$

Zu lösen:

$$\square u(\underline{r}, t) = -f(\underline{r}, t)$$

Ansatz:

$$u(\underline{r}, t) = \int_V d\underline{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' g(\underline{r} - \underline{r}', t - t') f(\underline{r}', t')$$

Faltung in Raum und Zeit!

Damit dieser Ansatz die inhomogene Gleichung löst,

muß gelten

$$\square g(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = -\delta(\underline{r} - \underline{r}') \delta(t - t')$$

mit $\square = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Physikalische Interpretation:

G ist das Potential, ~~das~~ das von einer punktförmigen Einheitsladung am Ort \underline{r}' zur Zeit t' erzeugt wird !!

Beachte:

Es muß das sogenannte Kausalitätsprinzip erfüllt sein:

d.h. die Welle $u(\underline{r}, t)$ soll nur durch Quellen in der Vergangenheit bestimmt sein; zukünftige Zeiten sollen keine Rolle spielen!

d.h. $G(\underline{r} - \underline{r}', t - t') = 0$ für $t < t'$