

freie Ladungen:

Materie Σ

Ladungen, die sich durch äußere
Felder bewegen lassen!

(bewegliche Ladungsträger: e^- in Metallen
Ionen in Elektrolyt)

Wir hatten (Kap. VI, 1: Polarisation und dielektr.
Verschiebung)

betrachte Isolatoren (Material ohne freie Ladungsträger)

a) mikroskop permanent Dipole



z.B. H_2O -Molekül

permanent Asymmetrie zweier Ladungen

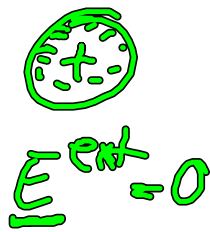
orientierbar in äußeren elektrischen
feldern:

Potenzielle Energie

$$W = -p \cdot E^{ext}$$

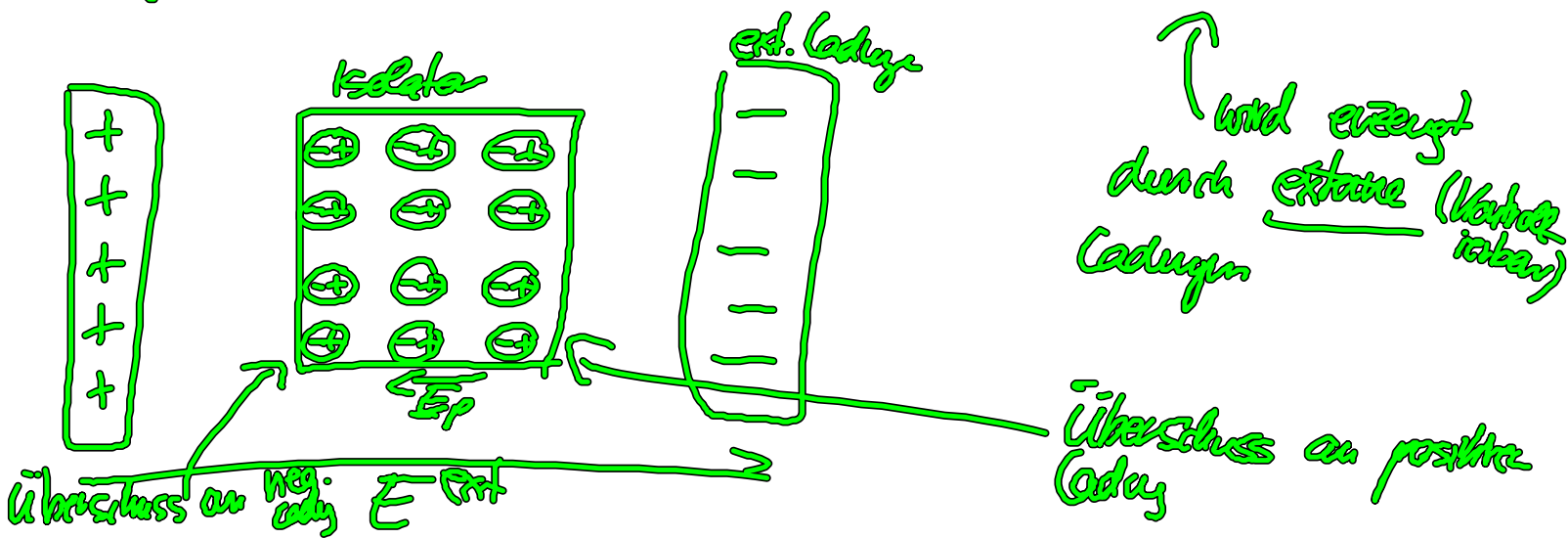
temperaturabhängige Effekte!

b) Polarisiertbarkeit von Teilchen (Moleküle, Ionenpaare), die kein permanentes Dipolmoment haben, aber in dem man ein Dipolmoment induzieren kann



Beachte: In diesem Fall der induzierten Dipole gilt immer $\underline{p} \parallel \underline{E}^{ext}$!!

Betrachte nun makroskop. Volumen eines Isolatoren ~~in~~ in einem externen elektr. Feld \underline{E}^{ext}



→ Die Überschussladungen an den
Grenzflächen führen zu einem
Zusatzfeld \underline{E}_p

→ sogenannte
Polarisationsladungen

→ Das Gesamtfeld im Inneren des Kondensators
ist gegeben durch

$$\underline{E} = \underline{E}^{\text{ext}} + \underline{E}_p$$

← Polarisationsfeld

$$\rightarrow \nabla \cdot \underline{E} = \nabla \cdot \underline{E}^{\text{ext}} + \nabla \cdot \underline{E}_p$$

Verbinde dies mit unserer früheren
Gleichung $\nabla \cdot \underline{E}^{\text{ext}} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^{\text{ext}}$

und dem Ansatz

$$\nabla \cdot \underline{E}_p = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_p \quad \textcircled{1}$$

← Polarisationsladungsdichte

d.h. $\rho_p = \rho_p(\underline{r}, t)$ ist die Quelle des
Zusatzfeldes $\underline{E}_p(\underline{r}, t)$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho^{\text{ext}} + \rho_p) \quad (2)$$

Definiere nun die sogenannte Polarisation

$$\underline{P}(\underline{r}, t) := -\epsilon_0 \underline{E}_p(\underline{r}, t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \nabla \cdot \underline{P}(\underline{r}, t) = -\rho_p(\underline{r}, t) \quad (3) \\ \text{mit } (1) & \end{aligned}$$

Kombiniere (1), (2), und (3)

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \underline{E}) = \rho^{\text{ext}} + \rho_p$$

$$\Leftrightarrow \rho^{\text{ext}} + \nabla \cdot (\epsilon_0 \underline{E}_p) = \rho^{\text{ext}} - \nabla \cdot \underline{P}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) = \rho^{\text{ext}}$$

Definiere nun die divergenz
Verschiebung in Materie:

$$\underline{D}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \underline{E}(\underline{r}, t) + \underline{P}(\underline{r}, t)$$

Polarisationsdichte
— existiert nur in
Materie!

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t)$$

freie, extern vorgegebene
Ladungen!

In diesen Maxwell-Gl. tauchen also
explizit nur die freien Ladungen auf,

nicht aber die Polarisationsladungen („gebunden“)

— diese sind bereits in $\underline{P}(\underline{r}, t)$ enthalten!

Bemerkungen

i) aus $\nabla \cdot \underline{P} = -\rho_p$ folgt für ein Volumen V
mit Oberfläche \underline{F}_V :

$$\oint_{\underline{F}_V} \underline{P} \cdot d\underline{E} = \int_V \nabla \cdot \underline{P} = - \int_V \rho_p$$

\Rightarrow Möglichkeit, die Ladungsdichte an den
lokale

Grenzkörpern zu bestimmen, falls
die Polarisation bekannt ist!

\Rightarrow daraus wieder das Feld \underline{E}_p

ii) In Materie haben die Größen $\rho(\underline{r}, t)$, $\underline{P}(\underline{r}, t)$ etc.
„nur“ gemittelte Charaktere!

Grund: „mikroskopische“ Betrachtung wäre gar nicht möglich
aufgrund der Vielzahl von Teilchen!
(Teilchendichte 10^{23} pro cm^3)

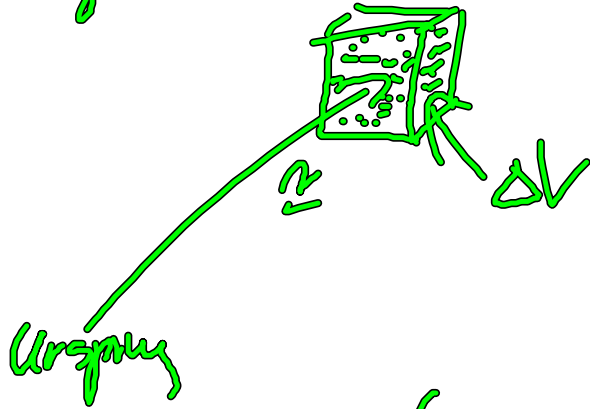
\rightarrow Mittelung über kleineres, aber mikroskopisches
Volumen ΔV

\uparrow

z.B. $\rho(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\underline{s} \rho_{\text{mikro}}(\underline{r} + \underline{s}, t)$

makrostep.
Ladungsdichte

$$\sum_{i \in \Delta V} q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i(t))$$



analog: $\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\underline{s} \underline{P}_{\text{mikro}}(\underline{r} + \underline{s}, t)$

(mikrostep. Dipolmoment, induziert)
 $\sum_i p_i(t) \delta(\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}_i(t))$

Beachte:

Durch die räumliche Mittelung
werden auch räumliche zeitlichen
Fluktuationen "geglättet"
(durch Wärmebewegung)

\Rightarrow Die räuml. Mittelung impliziert
auch eine zeitl. Mittelung

iii) Multiskalares skalares Potential (Lorentzform)

$$\Phi(\underline{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\underline{S}_p(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r} - \underline{r}'|}, \quad t_{ret} = t - \frac{r}{c}$$

IV.2. Magnetisierung und Magnetfeld in Materie

früher hatten wir nur eine Art von Stromdichte

(die, die durch frei, sich bewegende Ladungen hervorgerufen wird!)

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}_{\text{frei}}(\underline{r}, t)$$

in Materie gibt es noch mehr Arten von Strömen

$$\underline{j}^{\text{total}}(\underline{r}, t) = \underbrace{\underline{j}(\underline{r}, t)}_{\text{"freier Strom"}} + \underbrace{\underline{j}_{\text{mag}}(\underline{r}, t)}_{\text{"Magnetisierungsstrom"}} + \underbrace{\underline{j}_p(\underline{r}, t)}_{\text{"Polarisationsstrom"}}$$

entsprechend das Vektorpotential
(Lorentzform)

$$\underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\underline{r}' \left(\underline{j}(\underline{r}', t_{\text{ret}}) + \underline{j}_{\text{mag}}(\underline{r}', t_{\text{ret}}) + \underline{j}_p(\underline{r}', t_{\text{ret}}) \right) \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

mit $t_{\text{ret}} = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}'|}{c}$

Zum Polarisationsstrom

— erzeugt durch eine zeitlich veränderliche Polarisation (siehe Kap. VI.1)

$$\underline{j}_p(\underline{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}(\underline{r}, t) \quad \textcircled{*}$$

aus $\nabla \cdot \underline{P}(\underline{r}, t) = -\rho_p(\underline{r}, t)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_p(\underline{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \underline{P}(\underline{r}, t)) \\ &= -\nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{P}(\underline{r}, t) \right) \\ &= -\nabla \cdot \underline{j}_p(\underline{r}, t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathcal{S}_p(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot \mathbf{j}_p(\mathbf{r}, t) = 0 \right]$$

Polarisations-Gleichung und Kontinuitätsgleichung!

Zum Magnetismus

Resultat aus der Bewegung von den e^-
in den Atomen um die Kerne

→ mikroskopische Kreisströme

→ magnet. Moment (aus Bahn- und
Spinbewegung!)

Beachte: Diese ^{mikroskop.} magnet. Momente $\underline{m}_i(t)$
sind permanent (das auch ohne äußeres Feld
vorhanden!)

Im äußeren magnetischen Feld $\underline{B}^{\text{ext}}$
orientieren sich diese Momente bevorzugt
parallel zum Feld

$$W = - \underline{m}_i \cdot \underline{B}^{\text{ext}}$$

Potentielle Energie

Annahme:

Quellstrom (effektives) Teil im Inneren des Materials:

$$\textcircled{*} \quad \underline{B} = \underbrace{\underline{B}^{\text{ext}}}_{\text{äußeres Feld}} + \underbrace{\underline{B}_{\text{mag}}}_{\text{Zusatzbeitrag}}$$

benutze:

$$\nabla \times \underline{B}^{\text{ext}} = \mu_0 \underline{j}^{\text{ext}}$$

Ansatz:

$$\nabla \times \underline{B}_{\text{mag}} = \mu_0 \underline{j}_{\text{mag}}$$

mit $\underline{j}_{\text{mag}} = \nabla \times \underline{M}$

$$\begin{array}{l} \text{analog zu:} \\ \nabla \cdot \underline{E}' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\ \rho = -\nabla \cdot \underline{P} \end{array}$$

Dabei ist $\underline{M} = \underline{M}(\underline{r}, t)$ die makroskopische Magnetisierung!

$\underline{M}(\underline{r}, t)$ ist wieder ein Vektor

(und effektiv auch zeitlich) Mittelwert

$$\underline{H}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\underline{s} \underline{H}_{\text{mikro}}(\underline{r} + \underline{s}, t)$$

$\sum_{i \text{ in } \Delta V} q_i(t) d(\underline{r} + \underline{s} - \underline{r}_i(t))$

Kombination:

$$\underline{B} = \underline{B}^{\text{ext}} + \underline{B}_{\text{mag}}$$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{B} = \nabla \times \underline{B}^{\text{ext}} + \nabla \times \underline{B}_{\text{mag}} = \mu_0 \underline{j}^{\text{ext}} + \mu_0 \underline{j}_{\text{mag}}$$

$$= \mu_0 \underline{j}^{\text{ext}} + \mu_0 \nabla \times \underline{H}$$

$$\rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{H} \right) = \underline{j}^{\text{ext}}$$

definiere nun das makroskopische Magnetfeld in

Matrize:

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underbrace{\underline{H}}_{\text{Magnetisierungsbeitrag}}$$

$$\rightarrow \nabla \times \underline{H} = \underline{j}^{ext} \quad !!$$