

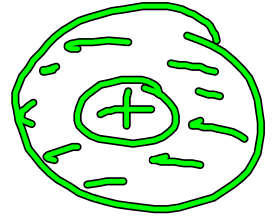
typische Materialbeziehung.

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \underline{\epsilon}_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r}, t)$$

- zeitlich "instantan"
- räumlich homogen
- skalar

Ziel: einfaches mikroskop. Modell für $\chi_e = \epsilon_r - 1$
statisch!

- betrachte nur 1 Atom
- im Atom Kern (nur) ein Dipolmoment
induziert werde!



Wir hatten:

$$\underline{Kern} : m_K \ddot{\underline{r}}_K = \underline{F}_K + Q_K \underline{E}^{ext}$$

Kraft durch die Elektronen

$$Q_K = Ze > 0$$

↑ Kernladung

N_e : Schwerepunkt der Elektronen

$$F_H = Q_H E_C(\underline{r}_H) \\ = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} (\underline{r}_H - \underline{r}_e)$$

Idee:
hanger geladene Kugel!

Elektronen:

$$Z m_e \ddot{\underline{r}}_e = \underline{F}_e + Q_e \underline{E}^{\text{ext}} \\ \text{mit } \underline{F}_e = -\underline{F}_H$$

Tafel ein: $\underline{r} = \underline{r}_H - \underline{r}_e$

$$\underline{r} \neq 0 \Leftrightarrow \text{ Ladungsstrom}$$

und nehme an, dass $m_H \gg Z m_e$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{Z m_e} \underline{r} + \frac{Ze}{Z m_e} \underline{E}^{\text{ext}}$$

mit $\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{ext}}$$

BWGL eines harmonischen Oszillators!

Stationärer Zustand: $\underline{\dot{r}} = \underline{\ddot{r}} = 0$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{ext}}$$

$$\underline{r} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{ext}} \quad (*)$$

Zugehöriges (induziertes) Dipolmoment.

definiere: $\underline{p} = Ze \underline{r}$

(Dimensionen: Ladung \times Ort !!)

o.k.!

hier:

$$\underline{p} = \int d\underline{r} \rho(\underline{r}) \underline{r}$$

hier: $\rho(\underline{r}) = \text{const. in der Lage}$

Vergleiche mit (*)

$$\underline{p} = Ze \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{ext}}$$

$$= \frac{Ze^2}{m_e} \frac{4\pi \epsilon_0 m_e R^3}{Ze^2 \omega_0^{-1}} \underline{E}^{\text{ext}} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \underline{E}^{\text{ext}}$$

definiere mikroskopische Polarisiertbarkeit des Atoms:

$$p = \epsilon_0 \alpha E^{\text{ext}}$$

mit

$$\alpha = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = 4\pi R^3 = 3 V_{\text{Atom}}$$

Vorallgemeinerung für viel

(nicht miteinander wechselwirkend)

Atome:

$$\underline{P} = n p = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}^{\text{ext}}$$

mikroskop. Polarisation

Teilchendruck

Konsistent mit unserer
früheren Definition.

$$\text{hier: } p_i = p \quad \forall i=1, \dots, N$$

$$\underline{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} p_i = n p$$

↖ Druck

$$\underline{P} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} d\underline{s} \underline{P}_{\text{mitt}}(\underline{r}+\underline{s})$$

$$\sum_{i \in \Delta V} p_i d(\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}_i)$$

Bis jetzt mikroskop. begründet.

Zusammenhang zwischen \underline{P} und
dem extern kontrollierbaren Feld $\underline{E}^{\text{ext}}$!!
 $\underline{E}^{\text{ext}}$..

Wir wollen aber Zusammenhang zw. \underline{P} und
dem makroskop. Feld \underline{E} im Körper !!
..

$$\underline{P} = \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad !!$$

..

Ansatz (Lorentz)

$$\underline{E}^{\text{total}}(\underline{r}) = \underline{E}(\underline{r}) + \underline{E}^{\text{nah}}(\underline{r}) - \underline{E}^{\text{P}}(\underline{r})$$



feld?

mit $\underline{E}^{\text{nah}}$: Betrag der ^(induziert o. permanent) Dipolse in einer
kugelförmigen Umgebung von r
— hängt ab von der multipo-
Konfiguration der Nachbarpole

\underline{E}^{P} : Feld, das aus einer
Kontinuumsapproximation kommt,
in der nur die Polarisier-
der ganzen Kugel eingetret!

$\Rightarrow \underline{E}^{\text{nah}} - \underline{E}^{\text{P}}$: Korrektur zum multipo-
Feld!

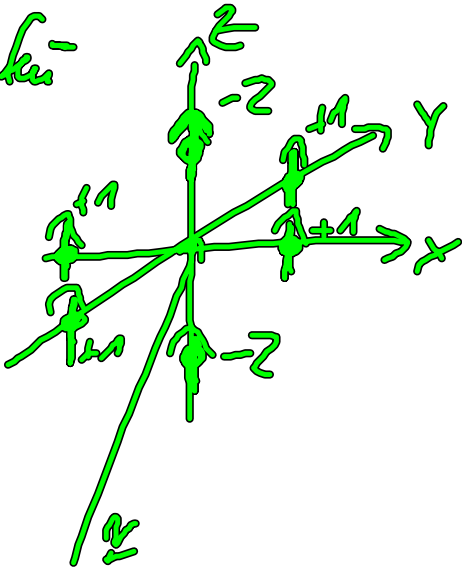
Man findet:

$$\underline{E}^{\text{nah}} \approx 0 \quad !!$$

in vielen Fällen, zumindest für symmetrische
Konfigurationen!

$$\underline{E}^{\text{nah}}(\underline{r}) = \sum_{i \text{ innerhalb einer Kugel um } \underline{r}} \left(\frac{3\rho_i(\underline{r}_i - \underline{r})(\underline{r}_i - \underline{r})}{4\pi\epsilon_0|\underline{r}_i - \underline{r}|^5} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_i}{|\underline{r}_i - \underline{r}|^3} \right)$$

Überlegung für
einfache
Kubisches
Gitter!



$$\underline{E}_z(\underline{r}) = 0 !$$

Für \underline{E}^P findet man:

$$\underline{E}^P = -\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$$

⇒ Übungsblatt 10

Feld im Inneren
einer ~~festen~~ homogen
polarisierten Kugel!
(beachte: Das Feld wird gegen die
Polarisation !!)

Einsetzen in den Gauß-Ansatz.

$$\underline{E}^{\text{total}}(\underline{r}) = \underline{E}(\underline{r}) + \cancel{\underline{E}^{\text{nah}}} - \underline{E}^P$$

$$= \underline{E}(\underline{r}) + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \quad !!$$

Kombiniere dies mit dem Ansatz

$$P = n \kappa \epsilon_0 \underline{E}^{\text{total}} \quad (1)$$

$$P = \chi_e \epsilon_0 \underline{E} \quad (2)$$

aus (1) $P = \overset{\text{Gesamt}}{\epsilon_0 n \kappa} \left(\underline{E} + \frac{1}{3 \epsilon_0} P \right)$

$$P \left(1 - \frac{n \kappa}{3} \right) = \epsilon_0 n \kappa \underline{E}$$

$$\Leftrightarrow P = \left(\frac{\epsilon_0 n \kappa}{1 - \frac{n \kappa}{3}} \right) \underline{E}$$

$$\stackrel{!}{=} \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \chi_e = \frac{n \kappa}{1 - \frac{n \kappa}{3}}$$

oder

$$n \kappa = \frac{\chi_e}{1 + \frac{\chi_e}{3}} = 3 \frac{\epsilon_0 \chi_e}{\epsilon_0 \chi_e + 2}$$

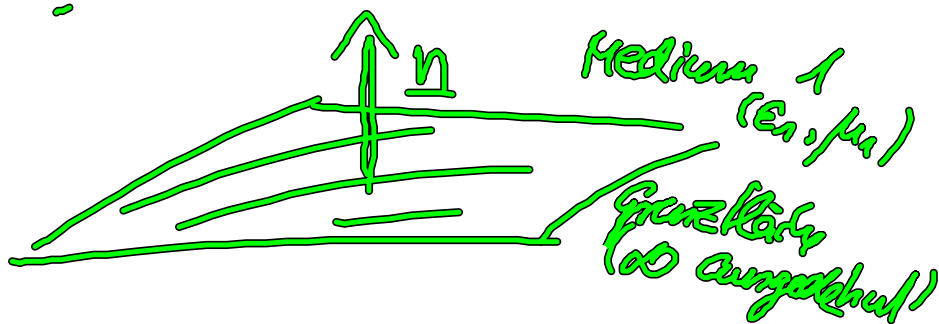
Formeln von Clausius und Lorentz
(1850 bzw. 1879)

VI, 5. Feldverhalten an Grenzflächen

(noch keine
Wellen)

Frage:

Welche Randbedingungen müssen die elektromagnetischen Felder an Grenzflächen zw. zwei Medien erfüllen?



① $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

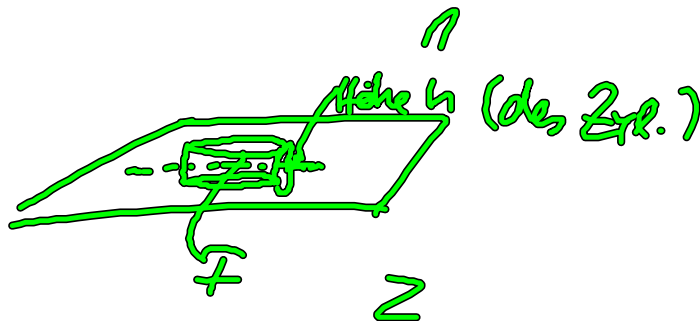
② $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$

③ $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

④ $\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$

Medium 2
(ϵ_2, μ_2)

Integriere ① und ② über ein kleines Volumen (Zylinder), das die Grenzfläche einschließt!



aus ① =

$$\int_{\text{Zyl.}} dV \nabla \cdot \underline{B} = \int_{F_V} dF \cdot \underline{B}$$

Oberfläche
des Zylinders

Betrachte Grenzfall
 $h \rightarrow 0$ und nehme an,
dass \underline{B} homogen
auf F

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{F_V} dF \cdot \underline{B} = \int_F dF \cdot (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)})$$

Nur Ober- und
Unterfläche tragen bei!

$$= \int_F dF (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n}$$

$$\stackrel{!}{=} 0 \quad \text{nach Maxwell!}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n} = 0}$$

\Rightarrow Normalkomponente von \underline{B} verhält sich
 stetig beim Durchgang durch die
 Grenzfläche
B · n

Analys:

Maxwell ②

$$\int_{\text{Zyl.}} dV \nabla \cdot \underline{D} = \int_{\text{Zyl.}} d\underline{F} \cdot \underline{D} \stackrel{\text{Maxwell ②}}{=} \int dV \rho$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\text{Zyl.}} d\underline{F} \cdot \underline{D} = \int_{\text{Zyl.}} d\underline{F} (\underline{D}^{(0)} - \underline{D}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \int dV \rho$$

Annahme:

Grenzfläche trägt eine (freie)

Räumenladungsdichte σ bei $z=0$

$$g(\underline{r}) = \sigma(x, y) d(z)$$

Grenzfläche ist die
 $x-y$ -Ebene!

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{Z_{\text{yl.}}} dV g(\underline{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\sqrt{F}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta(x,y) d\underline{r}$$

$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} d\underline{r} d\underline{r} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \int_{Z_{\text{yl.}}} dV g = \lim_{h \rightarrow 0} \int dF \delta(x,y)$$

δ konstant auf F

$$= F \cdot \delta$$

$$\rightarrow \boxed{(\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \delta}$$

Normalkomponente von \underline{D} macht also einen Sprung, falls $\delta \neq 0$

beachte: Auch für $\delta = 0$ kann aber

die Normalkomponente von \underline{E}
umkehrt sein!

$$\begin{aligned}\text{benutze: } \underline{D} &= \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} \\ &= \epsilon_0 \underline{E} + \epsilon_0 \chi_e \underline{E} \\ &= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E}\end{aligned}$$

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} \quad (\text{mit } D_n = \underline{D} \cdot \underline{n})$$

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \epsilon_1 E_n^{(1)} &= \epsilon_0 \epsilon_2 E_n^{(2)} \\ \Rightarrow E_n^{(2)} &= \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_n^{(1)}\end{aligned}$$

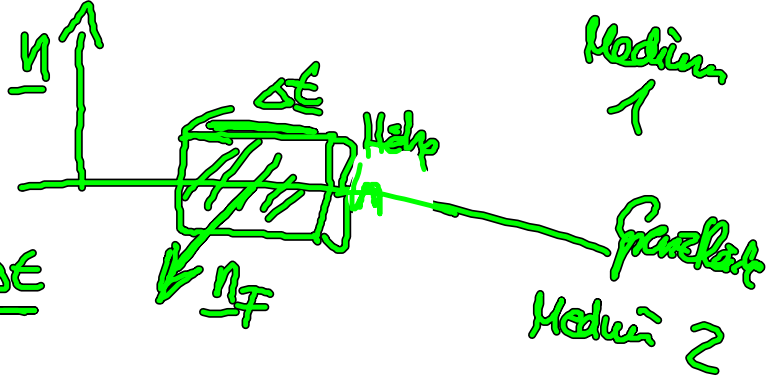
betrachte nun die Potentials-Maxwell-g.

$$\textcircled{5}: \nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

⑤

$$\int_F d\underline{E} \nabla \times \underline{E} = \int_{C_F} d\underline{r} \cdot \underline{E} \stackrel{!}{=} - \int d\underline{F} \cdot \underline{\dot{B}}$$

Stokes



$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{C_F} d\underline{r} \cdot \underline{E} = (\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \underline{\Delta x}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int d\underline{F} \cdot \underline{\dot{B}} = \lim_{h \rightarrow 0} \int d\underline{F} \underline{\dot{B}} \cdot \underline{n}_F = \underline{\dot{B}} \cdot \underline{n}_F \lim_{h \rightarrow 0} F = 0$$

beachte $\underline{n}_F \perp \underline{n}$!

$$(\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \underline{\Delta x} = 0$$

Tangential Komponent von \underline{E} ist stetig beim Durchgang durch die Grenzfläche !

Schließlich:

$$\int_F d\underline{E} \nabla \times \underline{H} = \int_{C_F} d\underline{r} \cdot \underline{H} \stackrel{\text{Maxwell}}{=} \int_F d\underline{F} \cdot \underline{j} + \int_F d\underline{F} \cdot \underline{\dot{D}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{C_F} d\underline{r} \cdot \underline{H} = \left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t}$$

Tangentiale Komponenten
von \underline{H}

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int d\underline{F} \cdot \underline{D} = \underline{D} \cdot \underline{n}_F \quad \lim_{h \rightarrow 0} F = C$$

Zum Oberflächenintegral:

Nehme an, die Platte habe eine konstante
"Flächendurchdringungsdichte"

$$j(\underline{r}) = g(x, y) d(\underline{r})$$

Geneigte Platte liegt
nicht in der $x-y$ -Ebene
(bei $z=0$)

Platte, über die integriert wird, liegt in der
 $x-z$ -Ebene.
in y -Richtung

$$\int dF \cdot \underline{j}(x, t) = \int dF \frac{j \cdot \underline{n}_F}{\sqrt{dx \cdot dz}} = \int dx g(x, y) \cdot \underline{n}_F$$

$$= g \cdot \underline{n}_F \cdot \Delta x$$

Zusammenfassend:

$$\left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t} = (g \cdot \underline{n}_F) \cdot \underline{\Delta t}$$

Tangentialkomponente von \underline{H} macht einen Sprung, falls Plattenstärken d vorhanden!