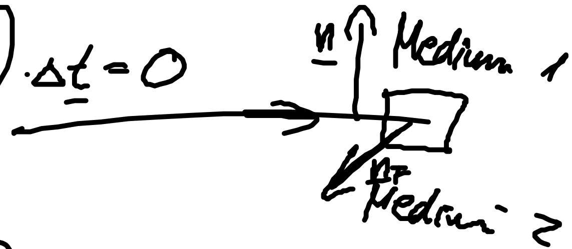
Wh.:

- $\left(\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}\right)\cdot \Delta\underline{t} = 0$

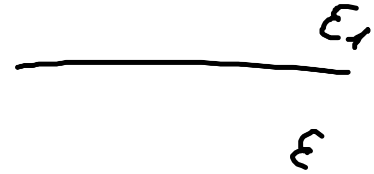


- $\left(\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}\right)\cdot \underline{n} = \sigma$ — Flächenladungsdichte
- $\left(\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}\right)\cdot \underline{n} = 0$
- $\left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)}\right)\cdot \Delta t = \left(\underline{g}\cdot \underline{n}_T\right)\cdot \Delta t$ — Flächenstromdichte

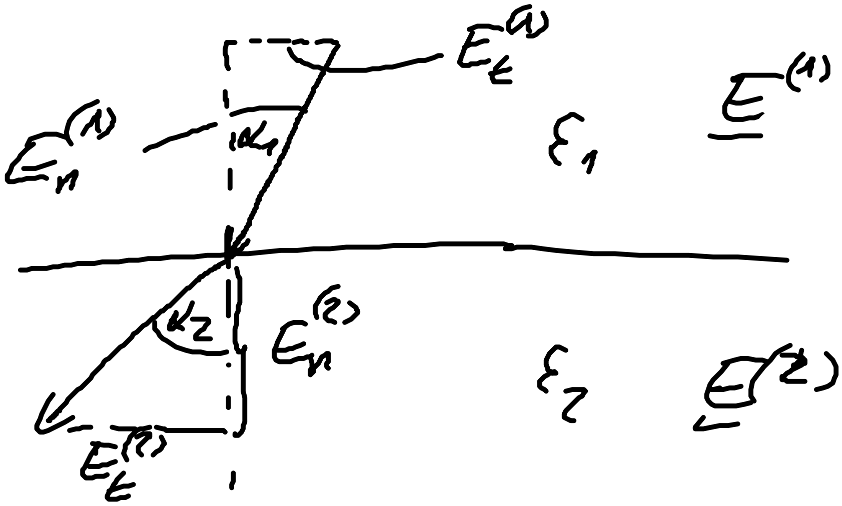
---

Beispiel

Grenzfläche zweier Medien mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ $(\mu_1 = \mu_2 = 1)$
mit $\sigma = 0$



Frage: Wie verhält sich das $\underline{E}$-Feld beim Durchgang durch die Fläche?



es gilt: $E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$

$$D_n^{(1)} = D_n^{(2)} \quad \text{da } \sigma = 0$$

$$\rightarrow \varepsilon_1 E_n^{(1)} = \varepsilon_2 E_n^{(2)} \Longrightarrow E_n^{(2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_n^{(1)}$$

es gilt (aus der Zeichnung)

$$\sin\alpha_1 = \frac{E_t^{(1)}}{E^{(1)}}$$

mit $E^{(1)} = |\underline{E}^{(1)}|$

$$\cos\alpha_1 = \frac{E_n^{(1)}}{E^{(1)}}$$

(analog für α_2!)

$$\rightarrow \tan\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{E_t^{(1)}}{E_n^{(1)}} = \frac{E_t^{(2)}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_n^{(2)}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \underbrace{\frac{E_t^{(2)}}{E_n^{(2)}}}_{\tan\alpha_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tan\alpha_2}$$

Brechungsgesetz für Feldlinien beim Übergang von Medium 1 in Medium 2

• $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 1 \Longrightarrow \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} < 1$

(Übergang von "optisch dünneren" in ein "optisch dichteres" Medium

$\Longrightarrow \alpha_1 < \alpha_2$

(weil $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

„Brechung vom Lot weg"

• $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 1 \Longrightarrow$ Brechung zum Lot hin

VI.6. Wellen in Materie

Betrachte Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Abwesenheit freier Ladungen und Ströme, diesmal aber in Materie

$(\rho = j = 0)$

① $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

② $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

③ $\nabla \cdot \underline{D} = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \nabla \cdot \underline{E} = 0$

Annahme: $\boxed{\begin{aligned} \underline{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E} \\ \underline{B} &= \mu \mu_0 \underline{H} \end{aligned}}$ (*)

④ $\nabla \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} = 0$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c^2} \varepsilon \mu \dot{\underline{E}} = 0$$

Rotation von ① und ④

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \cancel{\underbrace{\nabla(\nabla \cdot \underline{E})}_{=0 \text{ wg. ③}}} - \Delta \underline{E} = -\nabla \times \dot{\underline{B}} \underset{④}{=} -\frac{1}{c^2} \varepsilon \mu \ddot{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2} \varepsilon \mu \ddot{\underline{E}} = 0}$$

analog:

$$\boxed{\Delta \underline{B} - \frac{1}{c^2} \varepsilon \mu \ddot{\underline{B}} = 0}$$

Gleichungen haben genau dieselbe Struktur wie früher im Vakuum!

$\Rightarrow$ Lösungen können sofort angegeben werden.

↪ ebene Wellen

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

mit $\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}\, k$ mit $k = |\underline{k}|$

(im Unterschied zu früher: dort war $\varepsilon = \mu = 1$!)

Man definiert: $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ „Brechungsindex" des Mediums!

$$\omega = \frac{c}{n}\, k$$

(früher: $n = 1$ (Vakuum)) !

(noch allgemeiner: $n = n(\omega)$)

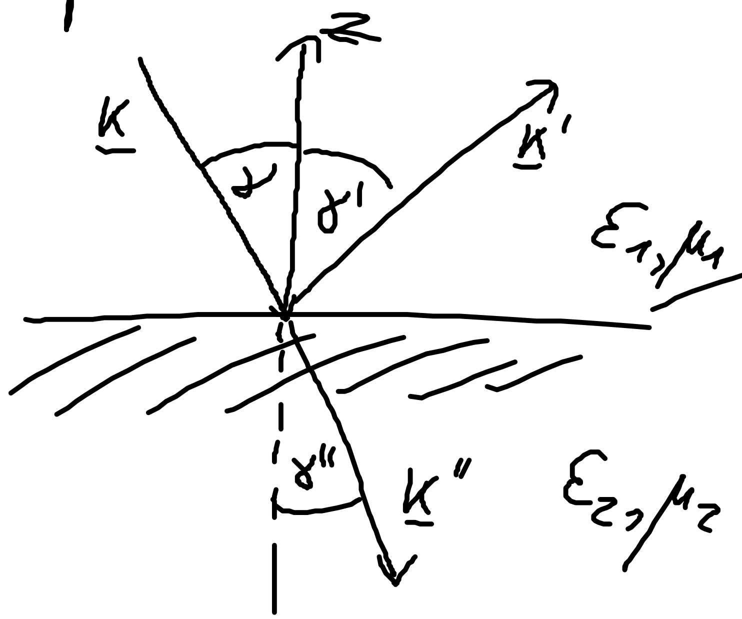
Außerdem:

Auch die früher hergeleiteten Beziehungen zur Transversalität der Wellen gelten noch (ersetze nun $c \to \frac{c}{n}$

$$\Rightarrow \underline{k}\cdot\underline{E}_0 = 0 \qquad \frac{\underline{k}}{k}\times\underline{E}_0 = \frac{c}{n}\underline{B}_0 = \frac{\omega}{k}\underline{B}_0$$

$$\underline{k}\cdot\underline{B}_0 = 0 \qquad \frac{\underline{k}}{k}\times\underline{B}_0 = -\frac{n}{c}\underline{E}_0$$

VI.7. Brechung und Reflexion elektromagnetischer Wellen an Materiegrenzflächen



Grenzfläche in der x-y-Ebene (bei z=0)

Annahme:

$\sigma = 0$

$\mu_1 = \mu_2 = 1$

Brechungsindizes: $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$

einfallende Welle

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$(\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \underline{E})$$

reflektierte Welle

$$\underline{E}' = \underline{E}_0' \, e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega' t)}$$

transmittierte Welle

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' \, e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega'' t)}$$

Frequenzen: $\omega = \frac{c}{n_1} k$, $\omega' = \frac{c}{n_1} k'$

$$\omega'' = \frac{c}{n_2} k''$$

Die $\underline{B}$-Felder stehen jeweils senkrecht auf $\underline{E}$ und $\underline{k}$

z.B. $\underline{B}_0 = \frac{c}{\omega} (\underline{k} \times \underline{E}_0)$

<u>Grenzbedingungen für die Felder:</u>

① $$\Big(\underbrace{\underline{E} + \underline{E}'}_{\text{Gesamtfeld in Medium 1}} - \underbrace{\underline{E}''}_{\text{Feld in Medium 2}}\Big) \cdot \Delta\underline{t} = 0$$

$\Delta\underline{t} = (\hat{x}, \hat{y}, z=0)$
Tangentialvektor

② $(\underline{D} + \underline{D}' - \underline{D}'')\cdot \underline{n} = 0$

$\underline{n} = \hat{\underline{z}}$
Einheitsvektor in z-Richtung

③ $(\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}'')\cdot \underline{n} = 0$

④ $(\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}'')\cdot \underline{\Delta t} = 0$

$\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$
(in beiden Medien)

da keine Flächenladungsdichte oder -Stromdichte

Diese Bedingungen müssen an allen Orten
auf der Grenzfläche $\underline{r} = (x, y, 0)$
und zu allen Zeiten t erfüllt sein!

$$\left(\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)} \right)$$

$$\Rightarrow e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}\Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega' t)}\Big|_{z=0}$$

$$= e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega'' t)}\Big|_{z=0} \quad (*)$$

betrachte Nullwert z.B. $\underline{r} = (0,0,0)$

aus (*):

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega' t} = e^{-i\omega'' t}$$

$$\Rightarrow \omega t = \omega' t = \omega'' t$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega' = \omega''}$$

Frequenzen werden bei der Brechung und Reflexion nicht geändert!

Folgerung für die Beträge der Wellenvektoren:

$$|\underline{k}'| = k' = k = |\underline{k}|$$

$$|\underline{k}''| = k'' = \frac{n_2}{n_1} k$$

Außerdem: Betrachte (*) ~~für~~ speziell für $t=0$

$$(\underline{k} \cdot \underline{r})_{z=0} = (\underline{k}' \cdot \underline{r})_{z=0} = (\underline{k}'' \cdot \underline{r})_{z=0}$$

→ Projektionen aller Wellenvektoren auf jedes beliebige $\underline{r}$ in der Grenzfläche sind gleich

→ $\underline{k}, \underline{k}', \underline{k}''$ liegen alle in einer Ebene, der sogenannten Einfallsebene

Folgerungen für die Winkel $\gamma, \gamma', \gamma''$:

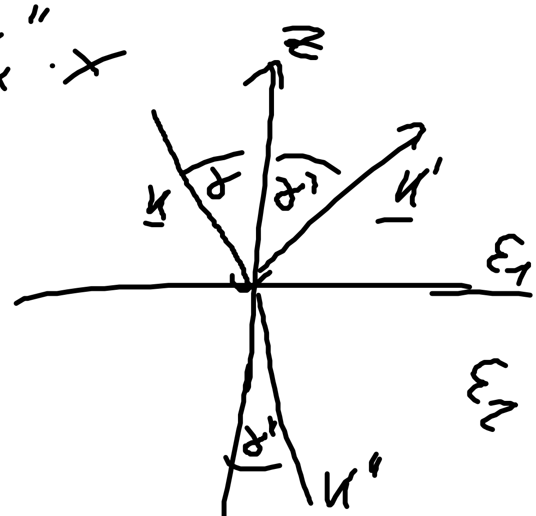
betrachte z.B. $(\underline{r} = x, 0, 0)$

→ bei $t=0$

$$k_x \cdot x = k_x' \cdot x = k_x'' \cdot x$$

$$k \sin\gamma \cdot x = k' \sin\gamma' x$$

$$= k'' \sin\gamma'' x$$



einerseits:
da $k = k'$

$\Rightarrow \boxed{\sin\gamma = \sin\gamma'}$

Reflexionsgesetz
„Einfallswinkel = Ausfallswinkel"

andererseits:

$$\boxed{\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'} = \frac{k'}{k''} = \frac{k}{k'} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Snellius'sches Brechungsgesetz

$n_1 < n_2 \implies \gamma'' < \gamma' = \gamma$

Übergang in optisch dichteres Medium

$n_1 > n_2 \implies \gamma'' >$

Übergang in optisch dünneres Medium

Ziel nun:

Berechnung der Feld-Amplituden

$\underline{E}_0, \underline{E}_0', \underline{E}_0''$

$\implies$ Information über die Intensitäten der reflektierten und transmittierten Welle relativ zur einfallenden!

Typischerweise 2 Spezialfälle:

a) Einfallende Welle linear polarisiert und schwingt senkrecht zur Einfallsebene (x-z-Ebene)

$$\underline{E}_0 = E_{0,y}\,\hat{\underline{y}}$$

b) Einfallende Welle ist linear polarisiert und schwingt in der Einfallsebene

$$\underline{E}_0 = E_{0,x}\,\hat{\underline{x}} + E_{0,z}\,\hat{\underline{z}}$$

→ Übung

(beachte: $\underline{E}_0$ muß $\perp$ auf $\underline{k}$ stehen!)

hier: Fall a)

Wir zeigen zunächst, daß auch die reflektierte und transmittierte Welle $\perp$ zur Einfallsebene schwingen:

- $E_{0,y} + E'_{0,y} - E''_{0,y} = 0$

Stetigkeit der Tangential-Komponente $\Longleftarrow$ $\boxed{E_{0,y} = E''_{0,y} - E'_{0,y}}$ ⊛

- $\cancel{D_{0,z}} + D'_{0,z} \Rightarrow D''_{0,z} = 0$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 E'_{0,z} = \varepsilon_2 E''_{0,z}$$

$\Rightarrow$ für $E'_{0,z} \neq 0$ ist auch $E''_{0,z} \neq 0$

das wäre ein Verletzung von ⊛ ! $\Rightarrow E''_{0,y} = E'_{0,y} = 0$, weil die Amplitudenvektoren senkrecht zu den entsprechenden Wellenvektoren stehen müssen

$\Rightarrow$ auch $\underline{E}'_0$ und $\underline{E}''_0$ zeigen in y-Richtung:

$$\underline{E}'_0 = E'_{0,y} \hat{y}$$

$$\underline{E}''_0 = E''_{0,y} \hat{y}$$

Um die Amplitude zu berechnen, benötigen wir Zusatzgleichung

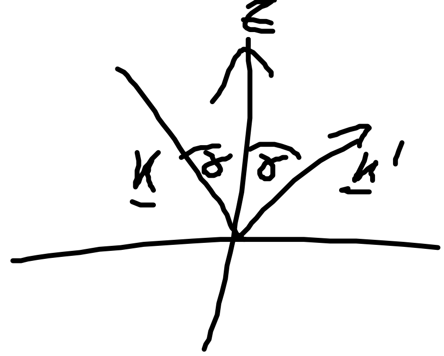
$$(B_{0,x} + B'_{0,x} - B''_{0,x}) = 0$$

Tangentialkomponente von $\underline{B}$ stetig

$$\frac{c}{\omega}\left(E_{0,y} k_z + E_{0,y}' k_z' - E_{0,y}'' k_z''\right) = 0 \qquad \boxed{B_0 = \frac{c}{\omega} E_{0,y} \begin{pmatrix} -k_z \\ 0 \\ k_x \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{k_z \left(E_{0,y} - E_{0,y}'\right) - E_{0,y}'' k_z'' = 0} \quad (**)$$

(wg. $k_z' = -k_z$)

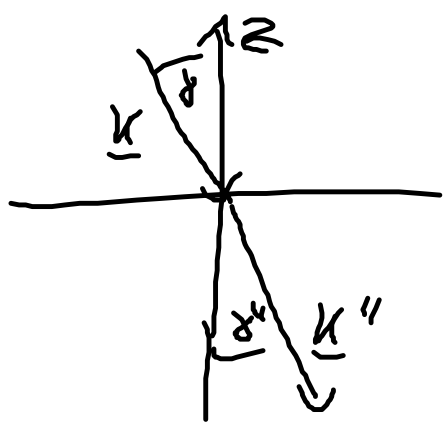


Kombiniere (*) und (**)

$$E_{0,y} + E_{0,y}' - E_{0,y}'' = 0 \qquad \Rightarrow \text{Amplitudenverhältnisse!}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{E_{0,y}'}{E_{0,y}} = \frac{k_z - k_z''}{k_z + k_z''} \; ; \quad \frac{E_{0,y}''}{E_{0,y}} = \frac{2 k_z}{k_z + k_z''}}$$

drücke k_z'' und k_z durch γ'', γ aus!



$$k_z'' = k'' \cos \gamma''$$

$$= k \frac{n_2}{n_1} \cos\gamma'' = k \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma''} \cos\gamma''$$

Snellius

$$k_z = k \cos\gamma$$

$\Rightarrow$ Man findet:

Fresnel'sche Formeln für die Brechung von ~~Licht~~ Licht, das linear polarisiert ist und $\perp$ zur Einfallsebene schwingt!

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{E'_{0,y}}{E_{0,y}} &= \frac{\sin(\gamma''-\gamma)}{\sin(\gamma''+\gamma)} \\ \frac{E''_{0,y}}{E_{0,y}} &= \frac{2\sin\gamma''\cos\gamma}{\sin(\gamma''+\gamma)} \end{aligned}}$$