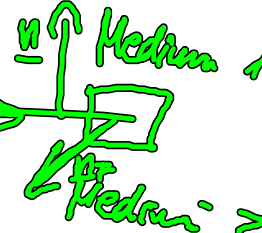


Wh:

- $(\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \underline{\Delta t} = 0$



- $(\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \sigma$ — Flächenladungsdichte

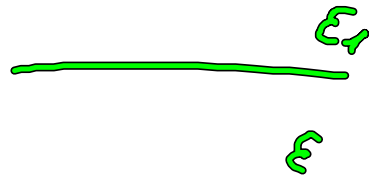
- $(\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n} = 0$

- $(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)}) \cdot \underline{\Delta t} = (\underline{g} \cdot \underline{n}) \cdot \Delta t$ — Flächenstromdichte

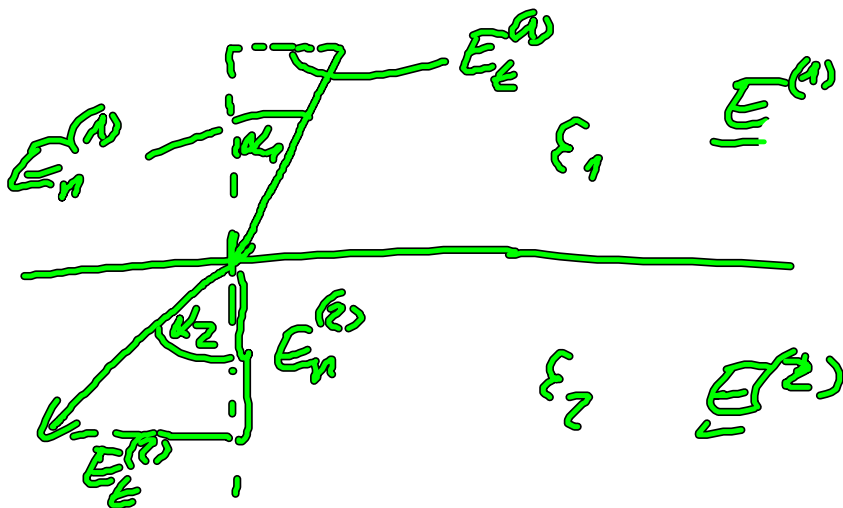
Beispiel

Grenzfläche zweier Medien
mit $\sigma = 0$

mit ϵ_1, ϵ_2
($\mu_1 = \mu_2 = 1$)



Frage: Wie verhält sich das
 \underline{E} -Feld beim Durchgang
zu durch die Fläche?



es gilt: $E_e^{(0)} = E_e^{(2)}$
 $D_n^{(0)} = D_n^{(2)}$ da $G=0$
 $\rightarrow \epsilon_1 E_n^{(0)} = \epsilon_2 E_n^{(2)} \implies E_n^{(2)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_n^{(0)}$

es gilt (aus der Zeichnung)

$$\sin \alpha_1 = \frac{E_e^{(0)}}{E^{(0)}}$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{E_n^{(0)}}{E^{(0)}}$$

mit $E^{(0)} = |E^{(0)}|$

(analog für α_2 !)

$$\rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{E_e^{(0)}}{E_n^{(0)}} = \frac{E_e^{(0)}}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_n^{(0)}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{E_e^{(0)}}{E_n^{(0)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \alpha_1 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \tan \alpha_2}$$

Bedingung für Totalreflexion:
 beim Übergang von Medium 1
 in Medium 2

$$\circ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} < 1 \Rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} < 1$$

(Übergang von "optisch dünnerem" in ein "optisch dichteres" Medium

$$\Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$$

„Brechung vom Lot weg“ (wobei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$$\circ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} > 1 \Rightarrow \text{Brechung zum Lot hin}$$

VI.6. Wellen in Materie

Betrachte Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Abwesenheit freier Ladungen und Ströme, dreimal aber in Materie

$$\circ \nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}} \quad (\rho = j = 0)$$

$$\textcircled{2} \nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\textcircled{3} \nabla \cdot \underline{D} = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \underline{E} = 0$$

Annahme:

$$\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$$

$$\underline{B} = \mu_0 \mu \underline{H}$$

$$\textcircled{4} \nabla \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c^2} \epsilon \mu \ddot{\underline{E}} = 0$$

Rotation von $\textcircled{1}$ und $\textcircled{4}$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = 0 \text{ wg. } \textcircled{3}$$

$$= \nabla (\nabla \cdot \underline{E}) - \Delta \underline{E}$$

$$= -\nabla \times \underline{B} = -\frac{1}{c^2} \epsilon \mu \ddot{\underline{E}}$$

\uparrow
 $\textcircled{4}$

$$\Rightarrow \Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2} \epsilon \mu \ddot{\underline{E}} = 0$$

analog:

$$\Delta \underline{B} - \frac{1}{c^2} \epsilon \mu \ddot{\underline{B}} = 0$$

gleichungen haben
genau dieselbe
Struktur wie
früher in
Vakuum!

\Rightarrow Lösungen können sofort angegeben werden.

\hookrightarrow ebene Wellen

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

mit $\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} k$ mit $k = |\underline{k}|$

(im Unterschied zu früher:
dort war $\epsilon = \mu = 1$!)

Man definiert:

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \quad \text{"Brechungsindex" des Mediums!}$$

$$\omega = \frac{c}{n} k$$

(früher: $n = 1$!
(Vakuum))

(noch allgemeiner: $n = n(\omega)$)

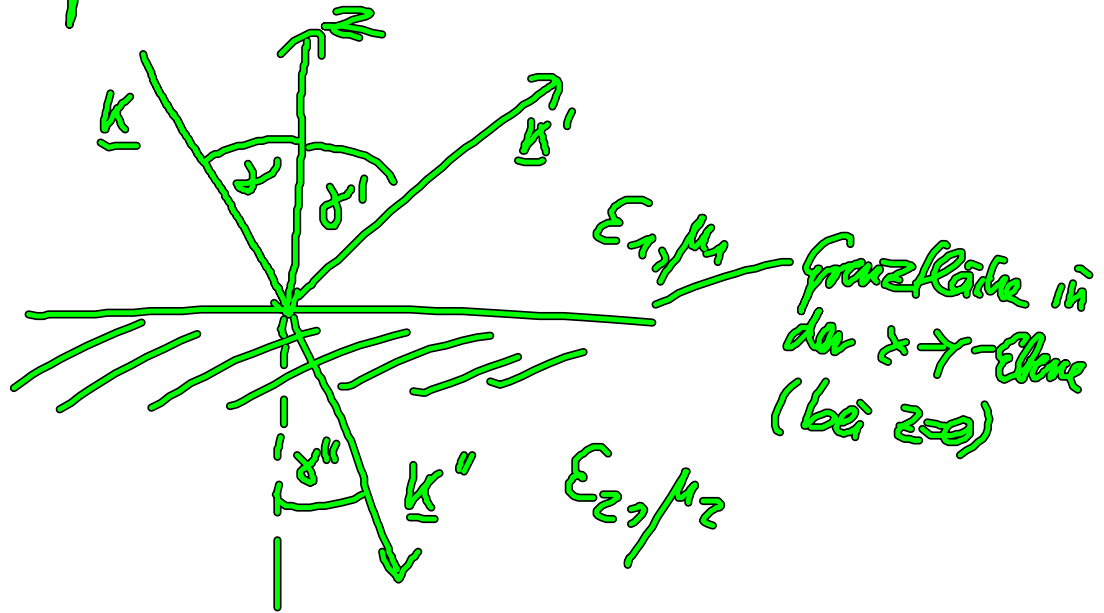
Außerdem:

Auch die früher hergeleiteten Beziehungen zur Transversalität der Wellen gelten noch (ersetze nun $c \rightarrow \frac{c}{n}$)

$$\Rightarrow \underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0 \quad \frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0 = \frac{c}{v} \underline{B}_0 = \frac{v}{c} \underline{B}_0$$

$$\underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0 \quad \frac{\underline{k}}{k} \times \underline{B}_0 = -\frac{v}{c} \underline{E}_0$$

VI, 7. Berechnung und Reflexion
elektromagnetischer Wellen
an Materiegrenzflächen



Annahme:

$$\underline{v} = 0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1$$

Brechungsindizes: $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$, $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$

einfallende Welle

$$i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)$$

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e$$

$$(\underline{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \underline{E})$$

reflektierte Welle

$$i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t)$$

$$\underline{E}' = \underline{E}_0' e$$

transmitted wave

$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t)}$$

Frequencies: $\omega = \frac{c}{n_1} k$, $\omega' = \frac{c}{n_1} k'$
 $\omega'' = \frac{c}{n_2} k''$

The \underline{B} -fields are always perpendicular to \underline{E} and \underline{k}

e.g. $\underline{B}_0 = \frac{c}{\omega} (\underline{k} \times \underline{E}_0)$

Boundary conditions for the fields:

$$\textcircled{1} (\underline{E} + \underline{E}' - \underline{E}'') \cdot \underline{\Delta t} = 0$$

total field
in medium 1

field in
medium 2

$$\underline{\Delta t} = (\hat{x}, \hat{y}, z=0)$$

Tangential direction

$$\textcircled{2} (\underline{D} + \underline{D}' - \underline{D}''). \underline{n} = 0$$

$\underline{n} = \hat{z}$
 Einheitsvektor in
 z-Richtung

$$\textcircled{3} (\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}''). \underline{n} = 0$$

$$\textcircled{4} (\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}''). \underline{\Delta t} = 0$$

$\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$
 in beiden Medien

da keine Flächenladungsdichte oder -stromdichte

Diese Bedingungen ^{müssen} an allen Orten
 auf der Grenzfläche $\underline{r} = (x, y, 0)$
 und zu allen Zeiten t erfüllt sein!

$$\begin{aligned} \rightarrow e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \Big|_{z=0} &= e^{i(\underline{k}' \cdot \underline{r} - \omega' t)} \Big|_{z=0} \\ &= e^{i(\underline{k}'' \cdot \underline{r} - \omega'' t)} \Big|_{z=0} \quad \textcircled{*} \end{aligned}$$

$(\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)})$

betrachte Wellenvektor $\underline{r} = \underline{r}_z$ $\underline{k} = (0, 0, 0)$

aus $(*)$,

$$e^{-i\omega t} = e^{-i\omega' t} = e^{-i\omega'' t}$$

$$\rightarrow \omega t = \omega' t = \omega'' t$$

$$\rightarrow \boxed{\omega = \omega' = \omega''}$$

Frequenzen werden bei der Brechung und Reflexion nicht geändert!

Folgerung für die Betrag der Wellenvektoren.

$$|\underline{k}'| = k' = k = |\underline{k}|$$

$$|\underline{k}''| = k'' = \frac{n_2}{n_1} k$$

Außerdem betrachte $(*)$ ~~für~~ speziell für $t=0$

$$\left(\underline{k} \cdot \underline{n} \right)_{z=0} = \left(\underline{k}' \cdot \underline{n} \right)_{z=0} = \left(\underline{k}'' \cdot \underline{n} \right)_{z=0}$$

→ Projektionen aller Wellenvektoren auf jedes beliebige \underline{n} in der Grenzfläche sind gleich

→ $\underline{k}, \underline{k}', \underline{k}''$ liegen alle in einer Ebene, der sogenannten Einfallsebene

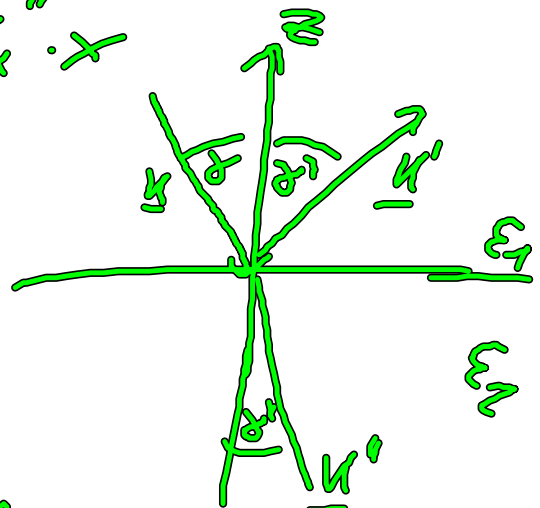
Folgerungen für die Winkel $\gamma, \gamma', \gamma''$:

betrachte z.B. ($\underline{n} = x, 0, 0$)

→ bei $t=0$

$$k_x \cdot x = k'_x \cdot x = k''_x \cdot x$$

$$k \sin \gamma \cdot x = k' \sin \gamma' \cdot x \\ = k'' \sin \gamma'' \cdot x$$



einerseits:
da $k = k'$

$$\Rightarrow \boxed{\sin \gamma = \sin \gamma'}$$

Reflexionsgesetz
„Einfallswinkel = Ausfallwinkel“

Andersseits:

$$\frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} = \frac{k'}{k''} = \frac{k}{k'} = \frac{n_1}{n_2}$$

Snellius'sches Brechungsgesetz

$$n_1 < n_2 \rightarrow \gamma'' < \gamma' = \gamma$$

Übergang in optisch dichteres Medium

$$n_1 > n_2 \Rightarrow \gamma'' > \gamma'$$

Übergang in optisch dünneres Medium

Ziel nun:

Berechnung der Feld-Amplituden

$$\underline{E}_0, \underline{E}_0', \underline{E}_0''$$

→ Information über der Intensitäten der reflektierten und transmittierten Welle relativ zur einfallenden!

Typischerweise 2 Spezialfälle.

a) Einfallende Welle linear polarisiert und schwingt senkrecht zur Einfallsebene ($x-z$ -Ebene) $\underline{E}_0 = E_{0y} \hat{y}$

b) Einfallende Welle ist linear polarisiert und schwingt in der Einfallsebene

$$\underline{E}_0 = E_{0x} \hat{x} + E_{0z} \hat{z}$$

(beachte: \underline{E}_0 muss \perp auf \underline{k} stehen!)

hier: Fall a)

Wir zeigen zunächst, dass auch die Reflex- und Transmissionswellen \perp zur Einfallsebene schwingen:

$$\bullet E_{0,y} + E_{1,y} - E_{2,y} = 0$$

Stichigkeit der
Tangential-
Komponente

$$\Leftrightarrow \boxed{E_{0,y} = E_{0,y}' - E_{0,y}''} \oplus$$

• $\cancel{D_{0,z}} + D_{0,z}' \Rightarrow D_{0,z}'' = 0$

$$\Rightarrow \epsilon_1 E_{0,z}' = \epsilon_2 E_{0,z}''$$

$$\Rightarrow \text{für } E_{0,z}' \neq 0 \text{ ist auch } E_{0,z}'' \neq 0$$

das wäre ein Verstoß von \oplus ! $\Rightarrow E_{0,y}'' = E_{0,y}' = 0$, weil die Anpländervektoren senkrecht zu den entsprechenden Wellenvektoren stehen müssen

\Rightarrow auch E_0' und E_0'' zeigen in y -Richtung:

$$E_0' = E_{0,y}' \hat{y}$$

$$E_0'' = E_{0,y}'' \hat{y}$$

Um die Amplitude zu berechnen, benötige ich Zusatzgleichung

$$(B_{0,x} + B_{0,x}' - B_{0,x}'') = 0$$

Tangentialkomponente von \underline{B} stetig

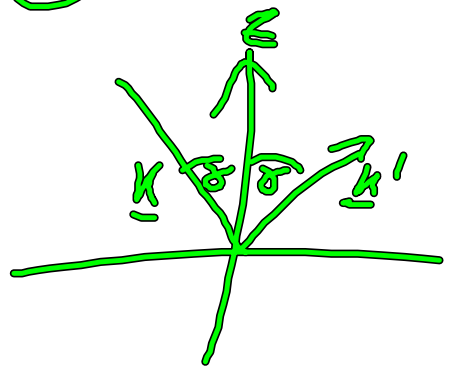
$$\frac{\Sigma}{\epsilon_0} (\epsilon_{0,y} k_z + \epsilon_{0,y}' k_z' - \epsilon_{0,y}'' k_z'') = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} \epsilon_{0,y} k_z \\ \epsilon_{0,y}' k_z' \\ \epsilon_{0,y}'' k_z'' \end{array} \right] = 0$$

$$\boxed{k_z (\epsilon_{0,y} - \epsilon_{0,y}') - \epsilon_{0,y}'' k_z'' = 0}$$

(wg. $k_z' = -k_z$)

(*)



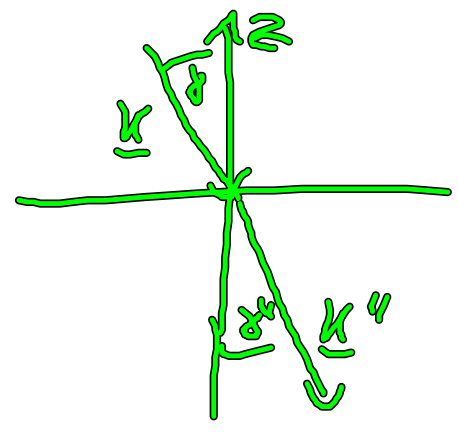
Von hier $\textcircled{*}$ und $\textcircled{**}$

$$\epsilon_{0,y}' + \epsilon_{0,y}' - \epsilon_{0,y}'' = 0$$

\Rightarrow Amplitudenverhältnisse!

$$\Rightarrow \left[\frac{\epsilon_{0,y}'}{\epsilon_{0,y}} = \frac{k_z - k_z''}{k_z + k_z''} ; \frac{\epsilon_{0,y}''}{\epsilon_{0,y}} = \frac{2k_z}{k_z + k_z''} \right]$$

drücke k_z'' und k_z durch δ'' , δ aus!



$$k_z'' = k'' \cos \delta''$$

$$= K \frac{n_2 \cos \delta''}{n_1} = K \frac{\sin \delta}{\sin \delta''} \cos \delta''$$

Snellius

$$K_2 = K \cos \delta$$

⇒ Man findet =

Fresnel'sche Formeln für die Reflexion
von ~~ein~~ Licht, das

$$\frac{E_{0,y}'}{E_{0,y}} = \frac{\sin(\delta'' - \delta)}{\sin(\delta'' + \delta)}$$

$$\frac{E_{0,y}''}{E_{0,y}} = \frac{2 \sin \delta'' \cos \delta}{\sin(\delta'' + \delta)}$$

linear polarisiert
ist und
⊥ zur
Einfallsebene
steht!