

VI. 7. Wellenausbreitung in elektr. Leitern

Betrachte Material mit $\rho(\underline{r}, t) = 0$,
aber $\underline{j}(\underline{r}, t) \neq 0$

(Ladungsneutral, unendl. Leiter)

→ Leiter!

Flussatz: $\underline{j}(\underline{r}, t) = \sigma \underline{E}(\underline{r}, t)$

(homogenes, isotropes Medium)

Maxwell - Glg.

$$\textcircled{1} \nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) = 0$$

$$\textcircled{2} \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = 0$$

$$\textcircled{3} \nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}(\underline{r}, t)$$

$$\textcircled{4} \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \mu_0 \sigma \underline{E}(\underline{r}, t)$$

$$+ \underbrace{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon \mu}_{n^2/c^2} \dot{\underline{E}}(\underline{r}, t)$$

$n = \sqrt{\epsilon \mu}$

$$\leadsto \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{E}) - \Delta \underline{E}$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} -\nabla \times \dot{\underline{B}} \stackrel{\textcircled{4}}{=} -\mu_0 \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} - \frac{n^2}{c^2} \ddot{\underline{E}}$$

$$\leadsto \Delta \underline{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} - \mu_0 \mu_0 \sigma \dot{\underline{E}} = 0$$

$$\left(\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu_0 \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{E}(\underline{r}, t) = 0$$

„Telegraphengleichung“

math. gedämpfte Wellengleichung!

Beachte

$$\text{analog } \nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{B}) - \Delta \underline{B}$$

mit Maxwell

$$\left(\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{B}(\underline{r}, t) = 0$$

\Rightarrow \underline{B} erfüllt ebenfalls Telegraphenglg.!

Ansatz für $\underline{E}(\underline{r}, t)$:

harmon. ebene Welle $\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$

Einsetzen

$$\Rightarrow -k^2 \underline{E}(\underline{r}, t) - \frac{n^2}{c^2} (-\omega^2) \underline{E}(\underline{r}, t) - \mu_0 \mu \sigma (-i\omega) \underline{E}(\underline{r}, t) = 0$$

$$-k^2 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} + \mu_0 \mu i \omega \sigma = 0$$

$$k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\mu_0 c^2 \sigma}{\epsilon \omega} \right) ; \quad c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$= \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon \omega} \right)$$

definition: $\tau = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$ „Relaxationszeit“

$$\leadsto \boxed{k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right)} \quad \textcircled{*}$$

- Wellenzahl wird komplex!
 - Für $\sigma = 0$ ($\tau \rightarrow \infty$) erhält man das alte Resultat für k^2
- jetzt: setze $k = \frac{\omega}{c} \hat{n}$

$$= \frac{\omega}{c} (\bar{n} + i \mu)$$

\hat{n} : komplexen Brechungsindex!

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\bar{n}^2 - \mu^2 + 2i \bar{n} \mu)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon \mu \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau} \right)$$

↑ Relaxationszeit

\Rightarrow Bestimmungsgl. für \bar{n}, μ als Funktionen von ϵ, μ, σ !

Materialparameter

$$\Rightarrow \boxed{\bar{n}^2 - \mu^2 = \epsilon \mu} \quad \textcircled{A}$$

$$2i\bar{n}\gamma = i\epsilon\mu \frac{1}{\omega\tau}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{n}\gamma = \frac{\epsilon\mu}{2\omega\tau} = \frac{\mu\sigma}{2\epsilon_0\omega}} \quad \textcircled{B}$$

Löse \textcircled{B} nach γ auf und setze in \textcircled{A} ein:

$$\Rightarrow \bar{n}^2 = \epsilon\mu + \mu^2 = \epsilon\mu + \left(\frac{\mu\sigma}{2\epsilon_0\omega\bar{n}}\right)^2 \quad / \cdot \bar{n}^2$$

$$\bar{n}^4 = \epsilon\mu\bar{n}^2 + \left(\frac{\mu\sigma}{2\epsilon_0\omega}\right)^2$$

$$\leadsto \bar{n}^4 - \epsilon\mu\bar{n}^2 = \left(\frac{\mu\sigma}{2\epsilon_0\omega}\right)^2$$

$$\bar{n}^2 = \frac{\epsilon\mu}{2} + \sqrt{\frac{(\epsilon\mu)^2}{4} + \frac{(\epsilon\mu)^2}{4} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}\right)^2}$$

$\gg \epsilon\mu/2$

da \bar{n} per Definition reell ist, muss die positive Wurzel genommen werden!

$$\bar{n}^2 = \frac{\epsilon \mu}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon \omega} \right)^2} \right]$$

ebenso folgt: $\mu^2 = \frac{\epsilon \mu}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon \omega} \right)^2} \right]$

Bemerkungen

• für $\sigma \rightarrow 0$ folgt:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{n}^2 \rightarrow \frac{\epsilon \mu}{2} (1+1) = \epsilon \mu \\ \mu \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{alte} \\ \text{Resultate!}$$

• für $\sigma \neq 0$ nennt man $\hat{n} = \bar{n} + i \mu$

verallgemeinertes Brechungsgesetz

Einsetzen in Ansatz:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}, \quad \text{def. } \hat{\underline{k}} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$

$$= \underline{E}_0 e^{i\left(\frac{\omega}{c} \hat{n} \cdot \underline{r} - \omega t\right)} \quad |\underline{k}| = \frac{\omega}{c} \hat{n}$$

$$= \underline{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c} (\bar{n} + i\gamma) \hat{\underline{k}} \cdot \underline{r} - i\omega t}$$

$$= \underline{E}_0 e^{-\gamma \frac{\omega}{c} \hat{\underline{k}} \cdot \underline{r}} e^{i\left(\frac{\omega}{c} \bar{n} \hat{\underline{k}} \cdot \underline{r} - \omega t\right)}$$

z.B. $\hat{\underline{k}} = \hat{\underline{e}}_z$

$$\leadsto \underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0 e^{-\gamma \frac{\omega}{c} z} e^{i\left(\frac{\omega}{c} \bar{n} z - \omega t\right)}$$

gedämpfte ebene Welle!

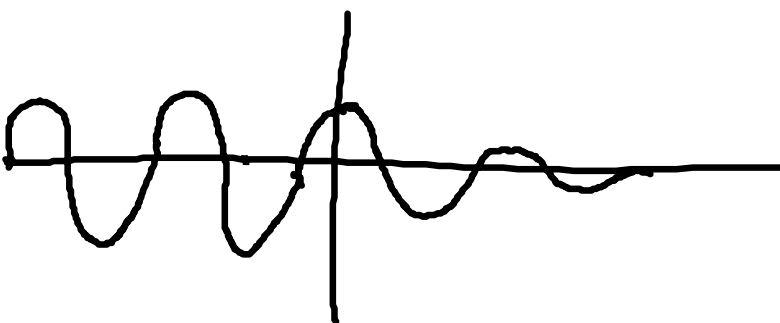
man nennt γ da „Extinktionskoeffizient“

$$\sigma = 0$$

$$\sigma \neq 0$$

physikal.:

Dämpfung resultiert aus der Bildung von Wärme im elektr. Leiter.



Bemerkungen

- Dämpfung \Rightarrow Welle dringt nicht beliebig weit in das Leitermaterial ein.

„Eindringtiefe“ $\hat{=}$ Entfernung Δz , nach der die Amplitude auf den e -ten Teil gedämpft ist.

$$\delta = \frac{c}{\omega \gamma}$$

- Folgerung für \underline{B}

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

Einsetzen in die Maxwell glg.

$\Rightarrow \hat{\underline{k}}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden wieder Rechtssystem

aber: Phasenverschiebung!

denn: $\underline{B}_0 = \frac{\hat{\underline{k}}}{c} (\hat{\underline{k}} \times \underline{E})$

mit $\hat{n} = \bar{n} + i\gamma = \underbrace{\sqrt{\bar{n}^2 + \gamma^2}}_{\text{Polarwert}} e^{i\varphi}$, (mit $\tan\varphi = \frac{\gamma}{\bar{n}}$)

$$\Rightarrow \underline{B} = \frac{\sqrt{\bar{n}^2 + \gamma^2}}{c} (\underline{k} \times \underline{E}) e^{i\varphi} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Phasenversch.} \\ \text{!} \end{array} \right.$$

(beachte: $\varphi = 0$ für $\gamma = 0 \Leftrightarrow \sigma \rightarrow 0$)

• Phasengeschwindigkeit

Bewegung einer Ebene der Welle mit konst. Phase $\varphi(t)$

$$\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t \stackrel{!}{=} \text{const}$$

Realteil

$$\approx \frac{\omega}{c} \bar{n} \underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t = \text{const.}$$

1dim: $\frac{\omega}{c} \bar{n} z - \omega t = \text{const} \quad (\underline{k} = \hat{e}_z)$

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{\omega \bar{n}} (\omega t + \text{const}) \right) = \frac{c}{\bar{n}}$$

beachte: für $\sigma \neq 0$ ist $\bar{n} > n$

→ die Phasengeschwindigkeit ist im Leiter kleiner als im Isolator!

Verhalten im sehr guten Leiter (σ groß):

$$\Rightarrow k^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon \omega} \right)$$

$$\textcircled{*} \quad \approx \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \frac{i}{\omega \zeta} \quad \zeta = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma}$$

gleichbedeutend: $1 \ll \frac{1}{\omega \zeta} \Leftrightarrow \zeta \ll \frac{1}{\omega}$

wegen: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\bar{n}^2 - \gamma^2 + 2i\bar{n}\gamma)$

Vgl. mit $\textcircled{*} \rightarrow \bar{n}^2 - \gamma^2 \approx 0$ verschwindender Realteil!

und $\bar{n}\gamma \approx \bar{n}^2 \approx \gamma^2 = \frac{\epsilon \mu}{2\omega \zeta}$

Resultierende Eindringtiefe

$$\delta = \frac{c}{\omega \sigma} \approx 0(\text{cm}) \text{ für } \omega = 100\text{Hz}$$

hochfrequente Wellen dringen also quasi nicht
in ein Metall ein!