

VI.8. Dielektrische Dispersen

Betrachte Materie mit $\mu = 1$

$$\rightarrow n = \sqrt{\epsilon}$$

Brechungsindex \leftarrow Dielektrizitätskonstante

Im ~~allgemein~~ den meisten Materialien ist ϵ und damit n eine frequenzabhängige Größe, d.h.

$$\epsilon = \epsilon(\omega)$$

$$n = n(\omega)$$

"Dispersion"

Zugehörige Materialgleichungen?

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{\infty} dt' \chi_e(\underline{r}, t-t') \underline{E}(\underline{r}, t')$$

Polarisation Suszeptibilität ($\epsilon = 1 + \chi_e$) ⊗

Annahmen:

- homogenes, isotropes Medium

- nur zeitliche Dispersion:

— daher in ⊗ nur Felder über die Zeit nicht über den Ort!

Kausalität: $\chi_e(\underline{r}, \underbrace{t-t'}_{\Delta t}) = 0$, falls ~~$t' > t$~~ !
 $t' > t$!
 Δt muß also positiv sein!

Fouriertransformation von Φ

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

analog für $\underline{E}(\underline{r}, t)$ und $\chi_e(\underline{r}, t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\underline{P}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t} \\ & = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{\chi}_e(\underline{r}, \omega') e^{-i\omega'(t-t')} \\ & \quad \cdot \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{\underline{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t'} \end{aligned}$$

benutze: $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i(\omega-\omega')t} = \delta(\omega-\omega')$

→ Die rechte Seite wird

$$\frac{\epsilon_0}{\sqrt{2\pi}} \int dt \tilde{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega) e^{-i\omega t}$$

Vergleiche linke und rechte Seite:

$$\underline{\tilde{P}}(\underline{r}, \omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e(\underline{r}, \omega) \underline{\tilde{E}}(\underline{r}, \omega)$$

Produkt im Frequenzraum

Häufig kann man Ortsabhängigkeit vernachlässigen!

$$\underline{\tilde{P}}(\omega) = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e(\omega) \underline{\tilde{E}}(\omega)$$

~~falls~~ Annahme jetzt: $\tilde{\chi}_e(\omega)$ bekannt

(mit dem Kipitsches Modell s. später!)

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}_e(\omega)$$

(komplexe) dielektrische Funktion

$$= \epsilon'(\omega) + i \epsilon''(\omega)$$

↑
reell

↑
reell

es gilt:

$$\circ \quad \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \chi(\varepsilon') e^{i\omega t'}$$

↗
Kauschität

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dt' \chi(\varepsilon') e^{i\omega t'}$$

• Beachte: $\chi_{\varepsilon}(\varepsilon)$ ist reell!
(reelle Antwortfunktion!)

$$\Rightarrow \varepsilon^*(\omega) = 1 + \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int dt' \chi(\varepsilon') e^{-i\omega t'} = \varepsilon(-\omega)!$$

Folgerungen für Wellenausbreitung?

wir hatten gesehen:

$$k = \frac{n}{c} \omega \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \\ = \frac{\varepsilon \omega^2}{c^2}$$

Jetzt: ϵ und damit n frequenzabhängig
und typischerweise komplex!

S. Notation
in Kap VI.7,
aufzu das hier
alles frequenzab-
hängig!

also Brechungsindex:

$$n \rightarrow \hat{n} = \bar{n}(\omega) + i\gamma(\omega)$$

$$n^2 \rightarrow \hat{n}^2 = (\bar{n}(\omega) - i\gamma(\omega))^2 + 2i\bar{n}(\omega)\gamma(\omega)$$

$$\Rightarrow \epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$$

$$\Rightarrow \epsilon'(\omega) = \bar{n}^2 - \gamma^2$$

$$\epsilon''(\omega) = 2\bar{n}\gamma$$

auflösen:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} - \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\epsilon'^2 + \epsilon''^2} + \epsilon' \right)^{\frac{1}{2}}$$

Spezialfälle

- $\epsilon'' = 0$
- $\epsilon'' > 0$

$$\Rightarrow \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \gamma > 0$$

$$\Rightarrow \hat{n} = \bar{n} = \sqrt{\epsilon'} \quad \text{mit reeller Brechungsindex}$$

„Absorption“, Energiedissipation

Der Frequenzbereich mit $\epsilon'' \ll \epsilon'$
heißt „Transparenzgebiet“ der Substanz
(wenig Absorption)

Weitere Folgerung aus der Frequenzabhängigkeit
→ bez. der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Annahme: $n = n(\omega)$

$$\underbrace{\operatorname{Re} k}_{\text{Realteil der Wellenzahl}} = \frac{\omega}{c} \bar{n}(\omega)$$

falls \bar{n} tatsächlich von ω abhängt, ~~dann~~
⇒ „nichtlineare Dispersion“

Folgerungen:

betrachte die sogenannte Gruppengeschw.

$$v_G := \frac{d\omega}{dk'} = \frac{1}{\frac{dk'}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}(\omega \bar{n}(\omega))} = \frac{c}{\bar{n} + \omega \frac{d\bar{n}}{d\omega}}$$

$k' = \operatorname{Re} k$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\text{Phase}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n(\omega)} \neq \text{Gruppengeschwindigkeit, falls } \frac{dn}{d\omega} \neq 0$$

'Background' zur Gruppengeschwindigkeit

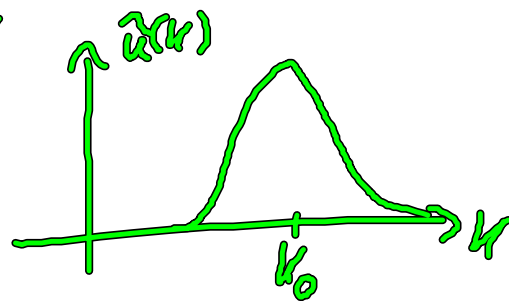
betrachte Welle der Form

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{u}(k) e^{i(kx - \omega t)}$$

„Wellenpaket“!

$\tilde{u}(k)$: Gewichtsfunktion

$$\omega = \omega(k)$$



„Startfrequenz“!

⇒ entwickle in Expansions

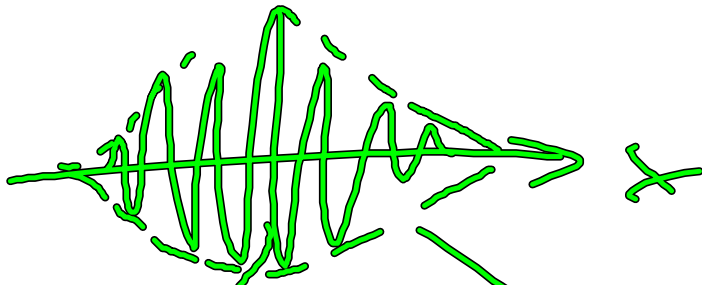
$$\omega(k) = \frac{\omega(k_0)}{\omega_0} + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + \mathcal{O}(k^2)$$

$$\text{also } \omega(k) \approx \omega_0 + (k - k_0) v_g(k_0) + \mathcal{O}(k^2)$$

$$\Rightarrow e^{i(kx - \omega t)} \\ \approx e^{ik_0 x} e^{+i(k - k_0)x - \omega_0 t - (k - k_0)v_G(k_0)t}$$

Einsetzen in ~~den~~ Ansatz für das Wellenpaket

$$\Rightarrow u(x,t) \approx e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u}(k) e^{i(k - k_0)x - (k - k_0)v_G(k_0)t} \\ = e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \bar{u}(x - v_G t)$$



\bar{u} bewegt sich mit Grp. v_G !

Punkte im Inneren bewegen sich mit

$$v_p = \frac{\omega(k)}{k}$$

Kramers-Kronig-Relationen

→ allgemeingültige Zusammenhänge
zwischen Real- und Imaginärteil
der dielektrischen Funktion

Wichtig: Diese Relationen folgen aus der Kausalität
der entsprechenden Antwortfunktion in der
Zeitdomäne

Herleitung mittels Funktionentheorie:

Kontext:

$$\underbrace{\varepsilon'(\omega) - 1}_{\operatorname{Re} \tilde{\chi}_e(\omega)} = \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega}}_{\substack{\text{Hauptwert} \\ \text{(principal value)}}} \frac{\varepsilon''(\omega')}{\omega' - \omega}$$

$$\underbrace{\varepsilon''(\omega)}_{\operatorname{Im} \tilde{\chi}_e(\omega)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \frac{\varepsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega}$$

dabei ist

$$P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{\omega - \epsilon} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} + \int_{\omega + \epsilon}^{\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} \right]$$

Integrand hat Pol bei $\omega' = \omega$

Die Kramers - Kronig - Relationen erlauben also die Berechnung des Real- aus dem Imaginärteil und umgekehrt!

VI, 9, Mikroskopisches Modell der Dispersion.

Ausgangspunkt.

mikroskopisches Modell zur statischen elektrischen Suszeptibilität eines Atoms (Kap. ~~III~~ VI.4)

betrachte wieder Schwingende Ladung
(Elektron)

$$\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) + \gamma \dot{r}(t) = \frac{e}{m_e} E^{\text{total}}(r, t)$$

mit r : Verbindungsvektor zwischen dem Schwerpunkt
der positiven und negativen Ladung!
(Kern)

$$\text{und } \omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$$

γ : Dämpfungs konstante („Reibsystem“) $\gamma > 0$
da $-\gamma \dot{r}$ eine Reibkraft entspricht

• Der Dämpfungs konstante reflektiert
(approximativ!) Einflüsse aus der
Umgebung!
↳ Störkräfte

• Das Modell heißt „Lorentz-Oscillator“

Entwertung an den statischen Fall.

$$\ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} = 0 \Rightarrow \underline{r} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{stat}}, \text{ daraus } \underline{p} = \underline{z} e \underline{r} \quad \text{mittlere Dipolmoment}$$

Polarisation:

$$\underline{P} = n \underline{p} = n \alpha \underline{E}^{\text{stat}}$$

↑
Teilchendichte!

$$\text{mit } \alpha = \frac{z e^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2}$$

(s. Kap. 17.4) „statische Polariserbarkeit“

Dynamisch:

$$\underline{E}^{\text{stat}} = \underline{E}^{\text{stat}}(t) = \underline{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\underline{P} = \underline{P}_0 e^{-i\omega t}$$

Keine
expliziten
Abhängig-
keiten!

benutze

$$\underline{P} = n \underline{z} e \underline{r}$$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}}(t) + \gamma \dot{\underline{r}}(t) + \omega_0^2 \underline{r}(t)$$

$$= n \frac{ze^2}{m_e} \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{total}}(\omega)$$

definiere: $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}$

$$\ddot{\underline{P}} + \gamma \dot{\underline{P}} + \omega_0^2 \underline{P} = \epsilon_0 \omega_p^2 \underline{\underline{\epsilon}}^{\text{total}}(\omega)$$

benutze: $\dot{\underline{P}} = -i\omega \underline{P}$, $\ddot{\underline{P}} = -\omega^2 \underline{P}$

Ersetzen:

$$(-\omega^2 - \gamma i\omega + \omega_0^2) \underline{P}_0 = \epsilon_0 \omega_p^2 \underline{\underline{\epsilon}}_0$$

$$\rightarrow \underline{P}_0 = \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i\omega)} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \quad (*)$$

definiere frequenzabhängige Permittivität

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i\omega}$$

(beachte: $\lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha(\omega) = \alpha$)

alters Ausdruck aus
Kap. VI. 4.

Vergleiche mit Definition der
direktr. Suszeptibilität

$$P(\omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) E(\omega)$$

benutze die Lorentz-Beziehung (s. Kap ~~IV~~ VI.4)

$$\underline{E}^{\text{total}} = \underline{E}_0 = \underline{E} - \frac{1}{3\epsilon_0} P$$

Einsetzen in (*)

$$P_0 \left(1 + \frac{\alpha(\omega)}{3} \right) = \epsilon_0 \alpha(\omega) \underline{E}_0$$

$$\rightarrow \underline{P}_0 = \epsilon_0 \frac{\alpha(\omega)}{1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}} \underline{E}$$

$$\rightarrow \chi_e(\omega) = \frac{\alpha(\omega)}{1 + \frac{\alpha(\omega)}{3}}$$

Vergleichen
den in Kap VI.4.
hergeleitete
Zusammenhang!

Beachte:

$$\alpha(\omega) \sim \omega_p^2 \sim n$$

↑ Dicke!

Plasmafrequenz!

benutze: $\frac{x}{1+x/3} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} x$
(Taylor)

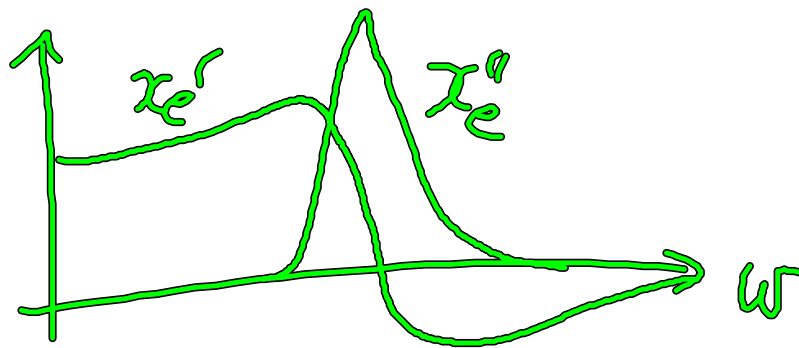
Im Limes kleiner Dichten gilt also

$$\begin{aligned} \chi_e(\omega) &= \alpha(\omega) \\ &= \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i \omega} \\ &= \chi_e'(\omega) + i \chi_e''(\omega) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \chi_e'(\omega) = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$\chi_e''(\omega) = \frac{\gamma \omega_p^2 \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

Komplexe
dielektrische
Suszeptibilität
(daraus
($\epsilon'(\omega)$, $\epsilon''(\omega)$))



Resonanz !