

Theoretische Physik VI : Vertiefung —
(Nichtlineare Dynamik und Kontrolle)

VL WS 2012/13 E. Schöll , K. Lüdge

Masterstudiengang Physik: Pflichtvorlesung TPV / VI
(grundlagenorientiert)

- Wahlpflichtfach zusammen mit einer anderen ZWS-Vorlesung
- anwendungsorientiertem Studiengang TPV oder TPVI

VL Do + Fr 10:15 - 11:45 EW203

UE: Judith Leinert

- Ergänzendes Seminar: Di 16⁰⁰ - 17⁰⁰ EW731
Numerische Methoden der nichtlinearen Dynamik

- Ergänzende VL: Mi 10⁰⁰ - 11³⁰
Nichtlineare Laserdynamik

Inhalte der VL

1. Dynamische Systeme
2. Kontrollkonzepte der nichtlinearen Dynamik
3. Zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle
4. Gekoppelte Systeme und Netzwerke
5. Wechselspiel von Zeitverzögerung und Rauschen
6. Anwendungen auf Laser
7. Anwendungen auf Neurodynamik

1. Dynamische Systeme u. deterministisches Chaos

Zentrale Fragestellungen :

- Langzeitverhalten
- Abhängigkeit von äußeren Parametern (Kontrollpar.)
- Abhängigkeit von kleinen äußeren Störungen
- Abhängigkeit von Ungenauigkeiten in den Anfangskonditionen
- globale Aussagen über den dynamischen Fluss
- geordnete oder ungeordnete (chaotische) Lösungen

Qualitative Dynamik: Fluss als Ganzes, Stabilität, topologische Struktur, Langzeitverhalten

1.1. Vektorfelder als dynamische Systeme

Dynamisch nichtl. Systeme lässt sich als System von (nichtlin.) Differentialgleichungen 1. Ordnung formulieren.

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ dyn. Var.

$\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t \rightarrow \mathbb{R}^n$

Vektorfeld

determinist. dyn. System

z.B. Newton'sche Bewegungsgleichung mit Reibung

$$\ddot{y} + \underbrace{f_1(y, t)}_{\text{Reibung}} \dot{y} + \underbrace{f_2(y, t)}_{\text{Kraft}} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 := y \\ x_2 := \dot{y} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -f_1 x_2 - f_2 \end{array}$$

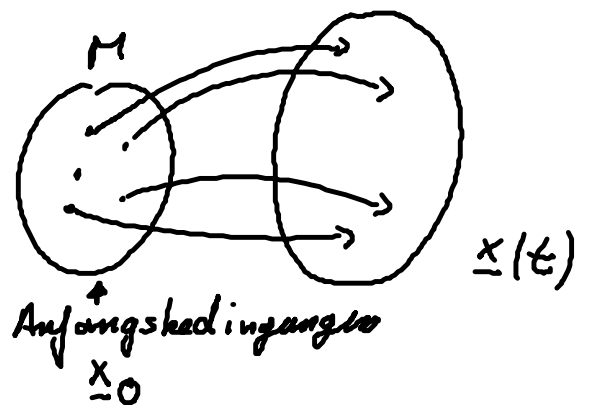
Speziell Hamilton'sche Systeme:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = q \\ x_2 = p \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array} \quad H(q, p) \text{ Hamiltonfkt.}$$

Fluss des Vektorfeldes \underline{F} auf der Mannigfaltigkeit M
(Phasenraum, z.B. \mathbb{R}^n)

$$\phi : M \times \mathbb{R}_t \rightarrow M$$

$$\text{mit } \phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) \\ = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$$



(Gesamtheit der Bahnkurven)
= Trajektorie

• Fixpunkte \underline{x}^* des autonomen dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$

$$0 \stackrel{!}{=} \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}^*) \rightarrow \underline{x}^*$$

• Stabilität eines Fixpunktes



stabil



labil
(instabil)



indiff.

Test durch Linearisierung für kleine Auslenkungen

$$\underline{\delta x} := \underline{x} - \underline{x}^*$$

$$\delta x_i = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{x^*} \delta x_k$$

$$\underline{\delta \dot{x}} = (DF)_{x^*} \underline{\delta x}$$

mit Jacobi-Matrix DF

$$A = (DF)_{x^*}$$

System von linearen Dgl.'s mit konst. Koeffizienten

Lösungsansatz

$$\underline{\delta x}(t) = \underline{\xi} e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda \underline{\xi} = A \underline{\xi}$$

Eigenwertgleichung

$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ liefert

λ_k : Eigenwerte

$\underline{\xi}^{(k)}$: Eigenvektoren

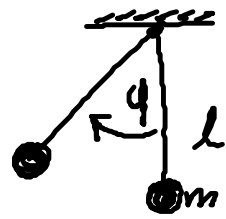
der Jacobi-Matrix $A = DF_{x^*}$

allgemeine Lösung:
$$\underline{\delta x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \underline{\xi}^{(k)} e^{\lambda_k t}$$

(Annahme: keine entarteten Eigenwerte $\lambda_{1,2}$
 $c_{1,2}$ durch Anfangsbedingungen bestimmt)

Beispiele: (i) Ebenes Pendel

$$m l^2 \ddot{\varphi} + m g l \sin \varphi = 0$$




$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \varphi \\ x_2 = p_\varphi = m l^2 \dot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \frac{x_2}{m l^2} \\ \dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 \end{array}$$

Fixpunkte: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0$
 $x_1 = n \cdot \pi \quad (n=0, 1, \dots)$
 2 Fixpunkte!

Linearisierung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{pmatrix}}_{DF} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & 0 \end{pmatrix}}_{DF} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) Fixpunkt mit $n=0$
 $x_1 = x_2 = 0$


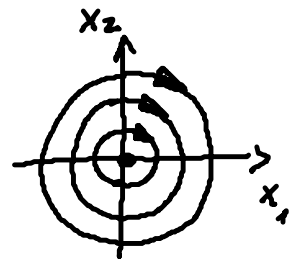
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & -\lambda \end{vmatrix}$
 $= \lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{g}{l}} = \pm i\omega \quad \text{Rein imaginär!}$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = c_1 \underline{f}^{(1)} e^{i\omega t} + c_2 \underline{f}^{(2)} e^{-i\omega t}$$

ungeclämpfte Schwingung



Zentrum

b) $x_1 = \pi$
 $x_2 = 0$

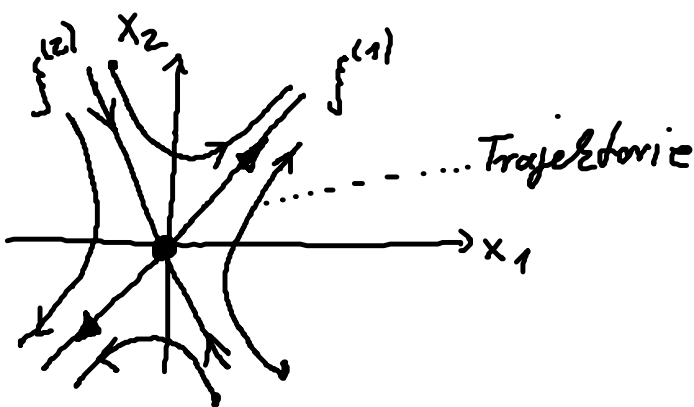
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{ml^2} \\ mgl & -\lambda \end{vmatrix}$
 $= \lambda^2 - \frac{g}{l} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}}$$

allgemeine Lösung $\delta \underline{x}(t) = c_1 \underline{f}^{(1)} e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t} + c_2 \underline{f}^{(2)} e^{-\sqrt{\frac{g}{l}} t}$

$t \rightarrow \infty \downarrow$ instabil
 \downarrow stabil



entlang der Richtung $\underline{f}^{(1)}$

Sattelpunkt

(ii) Ebenes Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$$

Reibung



$$x_1 = \varphi$$
$$x_2 = m l \dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{m l^2}$$

$$\dot{x}_2 = -m g l \sin x_1 - 2\gamma x_2$$

Fixpunkte ungedändert

Linearisierung:
$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x}_1 \\ \dot{\delta x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l \cos x_1 & -2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

a) Fixpunkt $x_1 = x_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m l^2} \\ -m g l & -2\gamma \end{pmatrix}$$

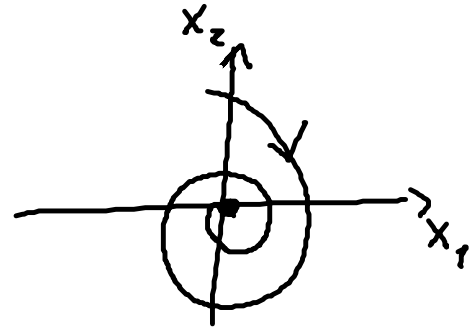
Eigenwerte:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

$$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$$

(schwache Reibung $\gamma^2 < \omega^2$)

(a₁) gedämpfte Schwingungen
(schwache Reibung)

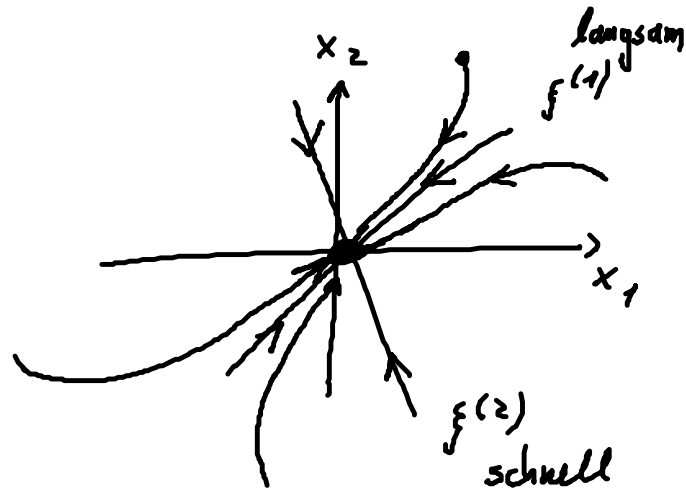


stabiler Fokus
stabil!

(a₂) aperiodische gedämpfte Schwingung
(starke Reibung)

$$\gamma^2 > \omega^2$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$$



stabiler Knoten

b) Fixpunkt $x_1 = \pi, x_2 = 0$
bleibt Sattelpunkt