

1.3. (Fortsetzung)

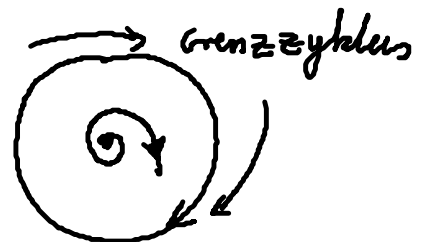
Klassifizierung von Bifurkationen

(B) Hopf-Bifurkation

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega \quad \text{mit } \lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$$



stab. Fokus



Grenzzyklus

Hopf Normalform: generische Taylorentwicklung in der Nähe der Hopf-Bifurkation

(2D-Zentrums-Mannigfaltigkeit)

$$\dot{z} = \left(\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)|z|^2 \right) z$$

linearer Anteil

nichtlinearer Anteil

\Rightarrow Bifurkation eines Grenzzyklus

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

$$\delta \dot{z} = (\lambda + i\omega) \delta z$$

Fixpunkt bei $z=0$
Eigenwert $\lambda + i\omega$

$\left. \begin{array}{l} \lambda < 0 : \text{stab. Fokus} \\ \lambda > 0 : \text{instab. Fokus} \end{array} \right\}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & \omega \\ -\omega & \lambda \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{tr} A}{2}\right)^2 - \det A} = \lambda \pm i\omega$$

Transformation auf Amplitude r und Phase φ :

$$z(t) = r(t) e^{i\varphi(t)}$$

$$\rightarrow i e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i\omega \mp (1+i\gamma)r^2) r e^{i\varphi}$$

$$\dot{z} = F(r, \varphi)$$

$$\text{Re: } \dot{r} = (\lambda \mp \gamma r^2) r$$

$$\text{Im: } \dot{\varphi} = (\omega \mp \gamma r^2)$$

Hopf-Normalform

\rightarrow " - " superkritischer Fall
" + " subkritisch

$$\dot{r} = 0 \rightarrow \underbrace{r = 0}_{\text{Fixpunkt}} \text{ oder } \underbrace{r^2 = \pm \lambda}_{\lambda \geq 0} \begin{array}{l} - \text{superkrit.} \\ - \text{subkrit.} \end{array}$$

\hookrightarrow Einsetzen in $\dot{\varphi}$

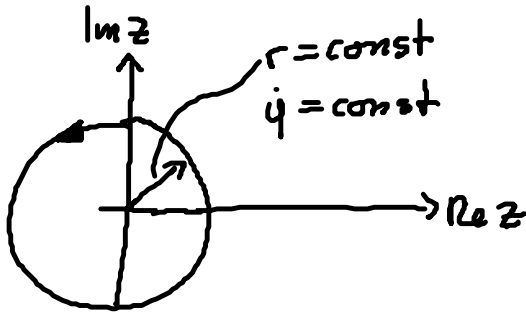
superkritisch

$$\dot{\varphi} = \omega - \gamma \lambda \quad \text{Frequenz}$$

Integration $\Rightarrow \varphi = (\omega - \gamma \lambda) t$

Lösungen : $r = 0$ (Fixpunkt)
 $z(t) = \sqrt{\pm \lambda} e^{i(\omega - \gamma \lambda) t}$ für $\lambda > 0$

Stuart-Landau-Oszillator



Im Bifurkationspunkt ($\lambda = 0$)

Amplitude $r = \sqrt{\pm \lambda} \rightarrow 0$
 Frequenz $\omega \neq 0$

Lineare Stabilität des Grenzzyklus
 im allgemeinen mit Floquet-Theorie

$$\dot{z} = f(z), \quad \text{period. Orbit } z^*(t) = z^*(t+T)$$

oGL $\delta \dot{z} = Df|_{z^*(t)} \delta z$ mit $Df(t) = Df(t+T)$
 also lin. ODE mit periodischen Koeffizienten

Lösungsansatz: $\delta z(t) = \sum_j c_j e^{\lambda_j t} u_j(t)$ mit $u_j(t) = u_j(t+T)$
Floquet-Moden
 Floquet-Exponenten $\lambda_j \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \Lambda u + \dot{u} = D_f u, \quad \delta z(t) = U(t) \delta z(0)$$

Floquet-Multiplikatoren $\mu = e^{\lambda T}$
 = Eigenwerte von $U(T)$

hier: analytische Lösung möglich in r, φ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta \dot{r} \\ \delta \dot{\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda - 3r^2 & 0 \\ -2\gamma r & 0 \end{pmatrix} z^*(t) \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} -2\lambda & 0 \\ -2\gamma \sqrt{\pm \lambda} & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \delta r \\ \delta \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Floquet-Exponenten sind die Eigenwerte von A :

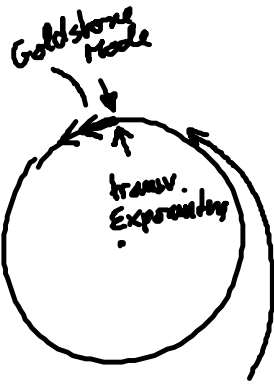
$$\Lambda^2 + 2\lambda\Lambda = 0$$

$$\Rightarrow \Lambda = \begin{cases} 0 \\ -2\lambda \end{cases}$$

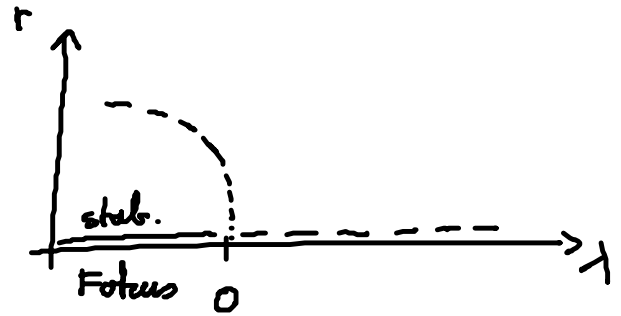
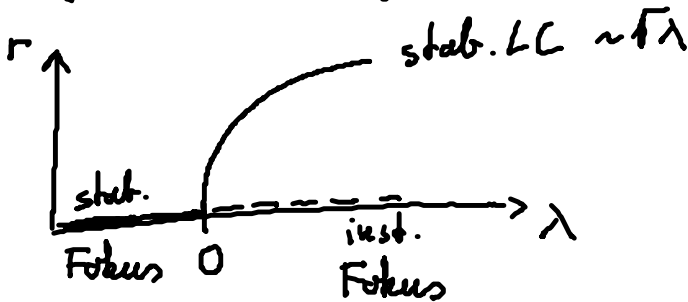
Goldstone Mode

$$\leq 0 \quad (\lambda \geq 0)$$

transversale Floquet-Exponenten



Bifurkationsdiagramm:



supercritische Hopf-Bif.

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega - (1 + i\mu)|z|^2)z$$

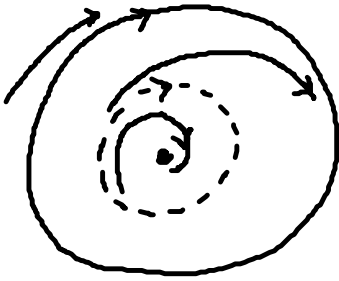
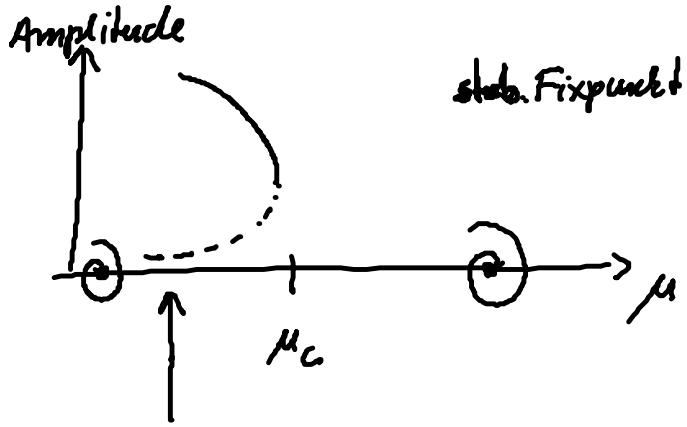
subkritische Hopf-Bifurkation

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega + (1 + i\mu)|z|^2)z$$

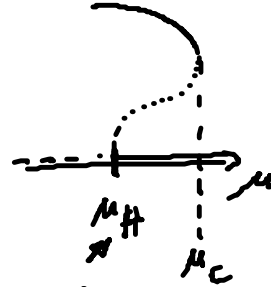
(C) Lokale Bifurkation von Grenzzyklen

Startpunkt jetzt: Grenzzyklus, nicht Fixpunkt
keine einfache lin. Stabilitätsanalyse

(C1) Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus



Bistabilität zwischen Fixpunkten und LC, häufig:

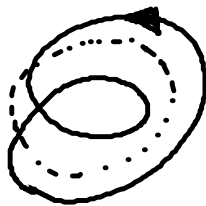


subkr. Hopf-Bif

Sattel-Knoten C1

(L2) Perioden - Verdopplung

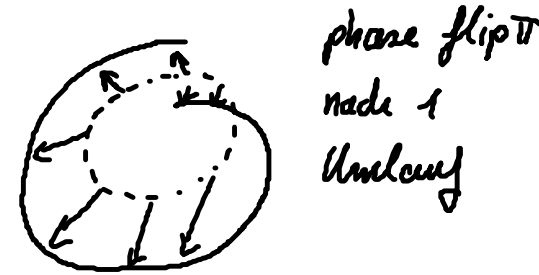
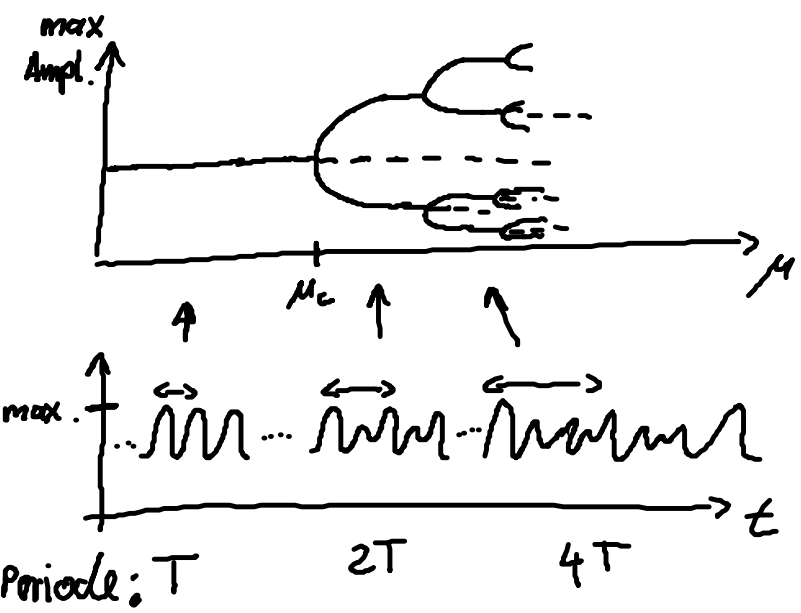
(flip - Bifurcation
subharm. Bifurkation)



Periode - 1
Grenzzyklus

Periode - 2
LC

mind. 3D Phasenraum



Torsion von benachbarten Trajektorien

Floquet-Exp
 $\Lambda = \lambda + i\omega$

Bif. bei μ_c : $\lambda = 0$
 $\omega T = \pi$

- häufig Periodenverdopplungskaskade
- chaos (Feigenbaum-Szenario)
- unendliche viele instabile period. Orbits der Periode $2^n T$

Floquet-Multiplikator
 $\mu = e^{\Lambda T}$
 $= e^{i\pi} = -1$

