

### 3. Zeitverzögerte Rückkopplungsverfahren

#### 3.1 Retardierte komplexe Systeme

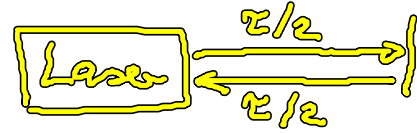
Delay-Differenzialgl.:  $\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t-\tau))$

## Verzögerungszeit $\tau$

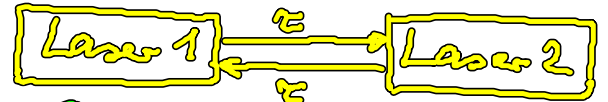
Delay (Retardierung) ist weitverbreitet in nichtlin. Systemen

- mechan. Systemen: Balancieren, Segway
- elektr. Stromkreise: Signalverarbeitungszeiten (Latenzen), kapazitive Effekte
- optische Systeme: Signallaufzeiten (Lichtgeschw.)

- Laser mit opt. Rückkoppl.



- 2 gekoppelte Laser

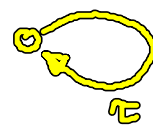


- biolog. Systeme: Zell-Zyklus-Zeit  $\tau$   
biolog. Uhren

- neuronale Netzwerke: zeitverzögerte Kopplung



zeitverzögerte Rückkopplung



z.B. biochem. Prozesse  
(Neurotransmitter)  
neuro-vaskuläre Kopplung

Retardierung generiert reichhaltiges, komplexes Verhalten

- Retardierung erhöht die Phasenraumdim. einer ODE (ordinary diff. eq.) auf unendlich.  
Anfangsbed. auf ganzem Intervall  $[-\tau, 0]$  notwendig:  
history function  $x(t)$  auf  $-\tau \leq t \leq 0$
- Einfache Dgl. produzieren komplexes nichtlin. Verhalten
  - delay-induzierte Bifurkation, Instabilität
  - delay-induzierte Multistabilität

- Stabilisierung von instab. period. oder stat. Zuständen
- Chaotikontrolle (Unterdrückung von Chaos)

lit.: T. Erneux: Applied delay differential eqs. (Springer 2003)  
 P. Hövel: Control of Complex Nonlin. Systems with Delay (Springer 2010)  
 V. Flunkert: Delay-Coupled Complex Systems (Springer 2011)  
 Just, Peister, Schanz, Schöll (eds.): Delayed complex systems  
 (Theme Issue of Phil. Trans. Roy. Soc. A 368 (2010) )  
 " " " " (2013)

### 3.2 Lineare Stabilitätsanalyse retardierter Differenzialgl.

einfachste lin. Delay-Dgl.  $\dot{x} = -a x(t) + b x(t-\tau)$   $a, b \in \mathbb{R}$   
 Anf. bed.  $x(t) = \phi(t)$   $-\tau \leq t \leq 0$

Fixpt.  $x^* = 0$

kleine Störung:  $x(t) \sim e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda e^{\lambda t} = -a e^{\lambda t} + b e^{\lambda t - \lambda \tau}$$

$$\boxed{\lambda = -a + b e^{-\lambda \tau}}$$

transzendente alar. Gl.  
 für Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$

Lösung für  $\lambda$ :  $\underbrace{(\lambda + a)\tau}_z = b\tau e^{-\lambda \tau}$

$$z e^z = b\tau e^{a\tau}$$

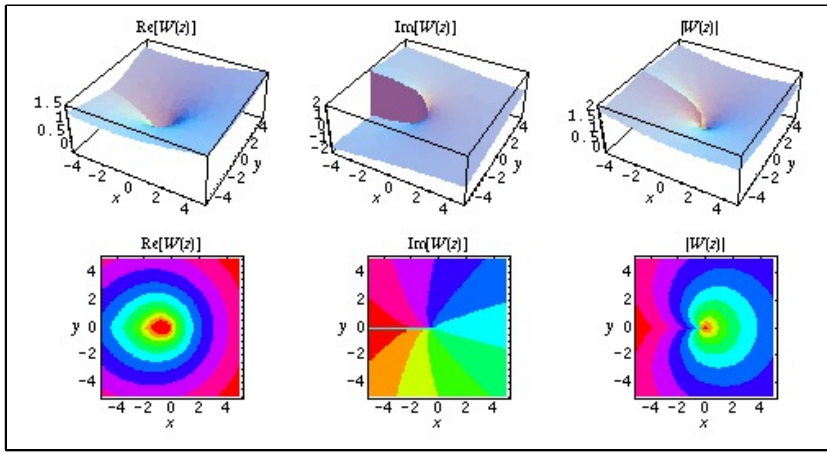
inverse Fkt. von  $z e^z = y$ :  $z = W_l(y)$  Lambert  
 (vielblättrig,  $l \in \mathbb{Z}$ )

$$(cf. e^z = y \Leftrightarrow z = \ln y)$$

$$\Rightarrow \lambda_l = -a + \frac{1}{\tau} W_l(b\tau e^{a\tau}) \quad (a > 0: \text{stab. Fixp. ohne Delay})$$

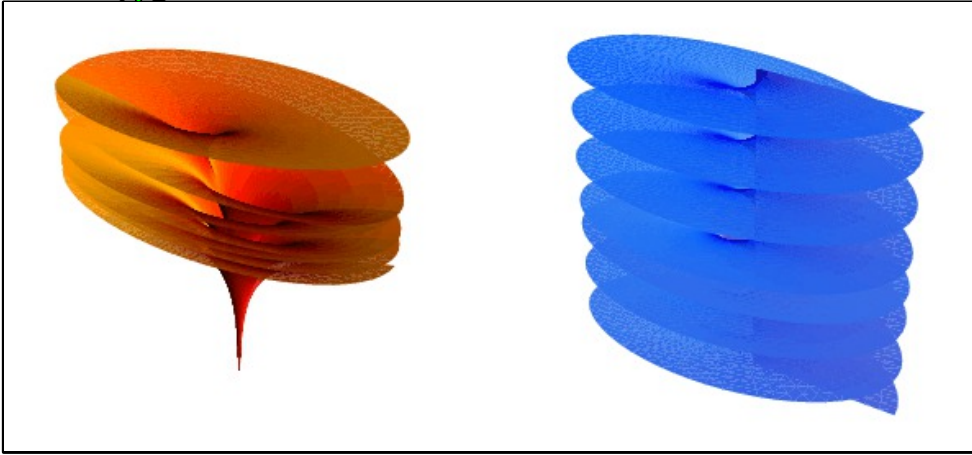
$$(a < 0: \text{inst. " " "})$$

$$\text{allg. Lsg. } x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{\lambda_l t}$$



Re  $W(z)$

Im  $W(z)$



Hauptzweig

$$W_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} z^n$$

$$(|z| < \frac{1}{e})$$

asymptot. Entwicklung für  $z \rightarrow 0$  u.  $z \rightarrow \infty$  ( $z \rightarrow \infty$ )

$$W_2(z) \approx \ln z + 2\pi i l$$

$$- \ln(\ln z + 2\pi i l)$$

$$z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow 0):$$

$$W_2(z) \approx \ln z + 2\pi i l + \frac{1}{2} \ln(\ln z + 2\pi i l)$$

$$\downarrow$$

$$-\infty$$

$$\lambda_l \rightarrow -\infty \quad \forall l \neq 0$$

$$z \rightarrow \infty \quad (z \rightarrow \infty): \lambda_l \approx -a + \frac{1}{z} [\ln(bz) + az + 2\pi i l - \ln(\ln z + 2\pi i l)]$$

lit. Amann, Schöll, Just: Physica A 373, 191 (2007)

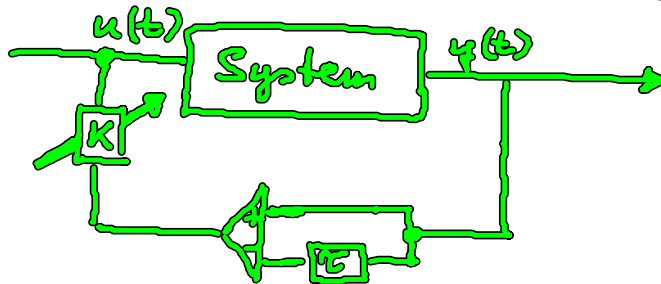
3.2.1 Stabilisierung instabiler Fixpunkte durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

Pymgas (1992)  
Phys. Lett. A 170, 421

$y(t)$ : Ausgangsvar.

$$u(t) = K[y(t) - y(t-\tau)]$$

Kontrollvar.



Verzög.zeit  $\tau$   
 Rückkoppl.stärke  $K$

closed-loop control

(Rückkoppl. kontrolle)

• nichtinvasiv

(Kontrollkraft verschwindet auf dem Zielzustand  $y(t) = y(t-\tau)$ )

Allg. Form eines 2-Var.-Systems (ohne Kontrolle)

$$\text{Fixpt. } \underline{x}^* : 0 \stackrel{!}{=} \dot{\underline{x}} = f(\underline{x}^*) \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^2$$

Linearisierung um  $\underline{x}^*$  für kleine Störungen:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^* + \delta \underline{x}(t) : \quad \delta \dot{\underline{x}} = (Df)_{\underline{x}^*} \delta \underline{x}$$

Jacobi-Matrix  $(Df)_{\underline{x}^*} \equiv A$

$$\text{Lsg. } \delta \underline{x} \sim e^{\lambda t} : 0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \lambda \text{tr} A + \det A$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A}}{2}$$

Normalform eines instab. Fokus  $\lambda = \alpha \pm i\omega$  ( $\alpha > 0$ )

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

komplexe Schreibweise  $\dot{z} = (\alpha \pm i\omega)z$ ,  $z = x \mp iy \in \mathbb{C}$

mit zeitverzögerte Rückkopplung

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} x(t) - x(t-\tau) \\ y(t) - y(t-\tau) \end{pmatrix}$$

"diagonale Rückkopplung"

$$\dot{z} = (\alpha \pm i\omega)z - K(z(t) - z(t-\tau))$$

$$\text{Ansatz } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \sim e^{\lambda t}$$

$$\text{char. gl. } 0 = \det \left[ \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \omega \\ -\omega & \alpha - \lambda \end{pmatrix} - K \begin{pmatrix} 1 - e^{-\lambda\tau} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-\lambda\tau} \end{pmatrix} \right]$$

$$= [\alpha + K(1 - e^{-\lambda\tau}) - \lambda]^2 + \omega^2$$

$$\Leftrightarrow [ \quad ]^2 = -\omega^2$$

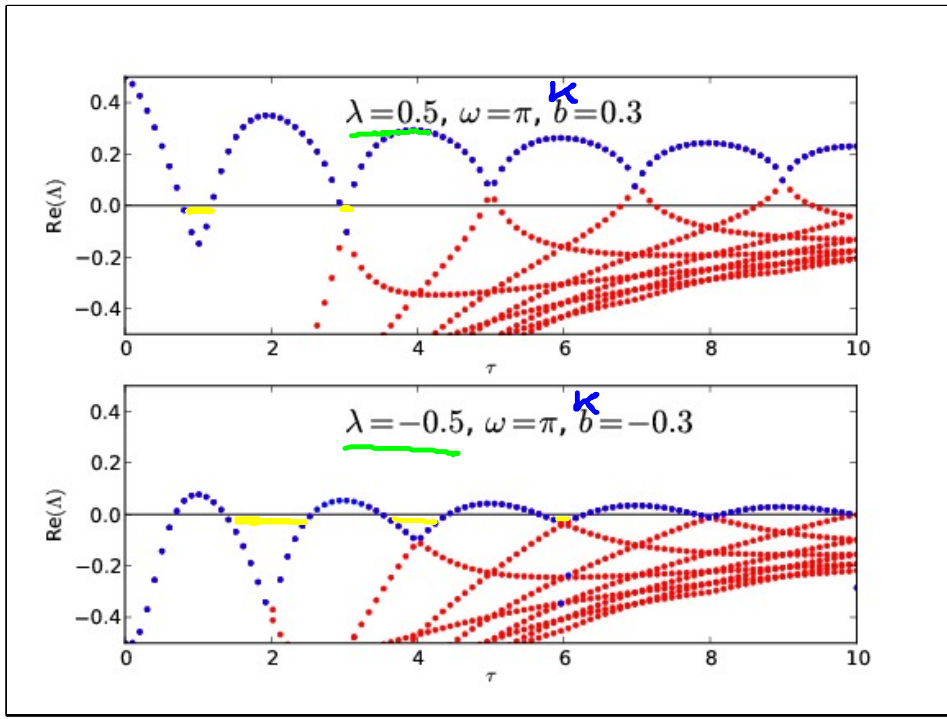
$$\Rightarrow \lambda + k(1 - e^{-\lambda \tau}) = \alpha \pm i\omega$$

Lösung durch Lambertfkt.  $(\lambda + k - (\alpha \pm i\omega))\tau = k\tau e^{-\lambda \tau}$

$$\tilde{\xi} e^{\tilde{\xi}} = k\tau e^{-(\alpha \pm i\omega)\tau + k\tau}$$

$$\Lambda \tau = W(k\tau e^{-(\alpha \pm i\omega)\tau + k\tau}) + (\alpha \pm i\omega)\tau - k\tau$$

natürliche Zeitskala:  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$  (Osz.periode ohne Delay)



unkontrolliert:  
Fixpkt. instab.  
( $\alpha > 0$ )

unkontrolliert:  
Fixpkt. stabil  
( $\alpha < 0$ )

nichtmonotones Verhalten der Eigenwollen  
 $Re \lambda$  als Fkt. von  $\tau$  führt abwechselnd  
 zu Stabilisierung / Destabilisierung

Stabilitätswechsel bei  $\tau \approx \frac{2n+1}{2} T_0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  
 $T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2$

