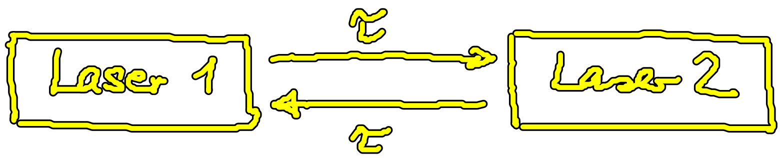
4. Gekoppelte Systeme und Netzwerke

4.1 Zwei gekoppelte Hopf-Normalformen

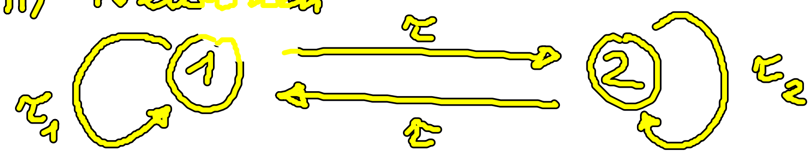
Motivation: (i)



Signallaufzeit $\tau \neq 0$

Frage: wann sind beide Laser synchronisiert?

(ii) Neuronen



$\tau, \tau_1, \tau_2 \neq 0$ i.a. (Signallaufzeit, neurovaskuläre Koppl. Ionenaustausch durch Zellmembran

2 subkritische Hopf-Normalformen: $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$\dot{z}_1 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z_1|^2) z_1 + a(z_2 - z_1)$$

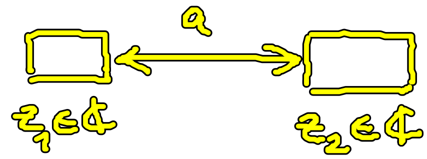
$$\dot{z}_2 = (\lambda + i\omega + (1 + i\gamma)|z_2|^2) z_2 + a(z_1 - z_2)$$

$\overbrace{\text{diffusive Kopplung}}$

Lit.: B. Fiedler, Flunkert, Hövel, Schöll, Phil. Trans. R. Soc. A 368, 319 (2010)

oBdA: $\omega = 1$

Hopf-Normalform (ohne Kopplung)



mit Kopplung: System beschrieben durch 4 dyn. Var. $\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z_1 \\ \mathrm{Im}\, z_1 \\ \mathrm{Re}\, z_2 \\ \mathrm{Im}\, z_2 \end{pmatrix}$

Synchroner Zustand $(z_1(t) = z_2(t) = z_{sync}(t))$

$\Rightarrow$ Kopplung verschwindet: 2 identische Systeme

$$z_{sync} = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$$

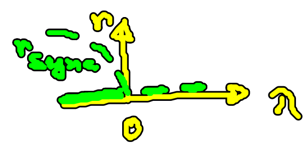
$$\Rightarrow \dot{z}_{sync} = \dot{r} e^{i\varphi} + i\dot{\varphi} r e^{i\varphi} = (\lambda + i + (1+i\gamma) r^2) r e^{i\varphi}$$

Re: $\dot{r} = (\lambda + r^2) r$

Im: $\dot{\varphi} = 1 + \gamma r^2$

- instabiler period. Orbit (UPO): $\dot{r} = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$

$$\boxed{r_{sync} = \sqrt{-\lambda}}$$



Phase des UPO: $\varphi = \omega t \equiv \frac{2\pi}{P_+}$

$$\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{P_+} = 1 + \gamma r_{sync}^2 = 1 - \lambda\gamma$$

$$\boxed{P_{sync} = P_+ = \frac{2\pi}{1 - \lambda\gamma}}$$

- Lösung für synchr. Zustand

$$\boxed{z_{sync} = \sqrt{-\lambda}\, \exp\left[\frac{2\pi i}{P_{sync}} t\right]}$$

Weitere spezielle invariante Lösungen im gekoppelten System?

Verwende neue Koord.: $z_+ = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ symm., synchr.

$z_- = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)$ antisymm., asynchr.

$$\dot{z}_+ = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 + \dot{z}_2) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{f(z_1) + f(z_2)}_{\text{Hopf-NF}} + a(z_2 - z_1) + a(z_1 - z_2)\Big]$$

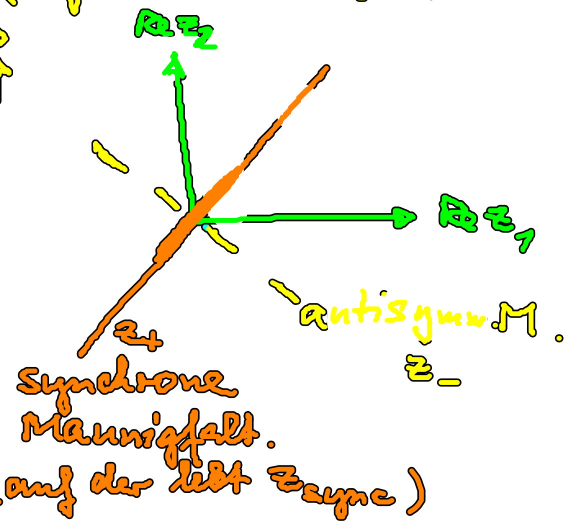
$z_1 = z_- - z_+$
$z_2 = z_- + z_+$

$$= \frac{1}{2}\big(f(z_+ + z_-) + f(z_+ - z_-)\big)$$

$$\dot{z}_- = \frac{1}{2}(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = \frac{1}{2}\big[f(z_+ + z_-) - f(z_+ - z_-)\big] - 2a z_-$$

- Menge gleichphasiger Lösungen (synchr. Lösungen)

$$Z_+ := \{ (z_+, z_-) \mid z_- = 0 \}$$



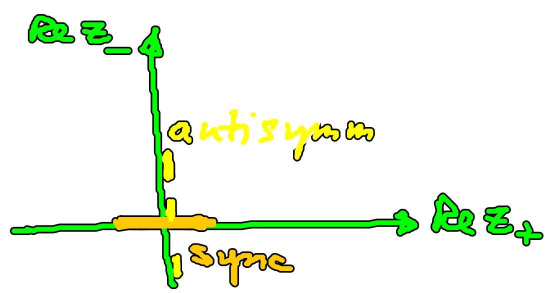
$z_+ = z_{sync}$

also $\dot{z}_{sync} = f(z_{sync})$
wie ungekoppeltes System

- Menge der gegenphasigen Lösungen:

$$Z_- := \{ (z_+, z_-) \mid z_+ = 0 \}$$

d.h. $z_1 = -z_2$



$$\Rightarrow \dot{z}_+ = \frac{1}{2}\big(f(0 + z_-) + f(0 - z_-)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\big(f(z_-) - f(z_-)\big) = 0$$

da f kub. Fkt. (ungerade) von z

$\Rightarrow$ Lösung für z_-: $\dot{z}_- = \frac{1}{2}\big(f(z_-) - f(-z_-)\big) - 2a z_-$

$$= f(z_-) - 2a z_-$$

$= \left(\lambda + i + (1+i\gamma)|z_-|^2\right) z_- - 2a z_-$

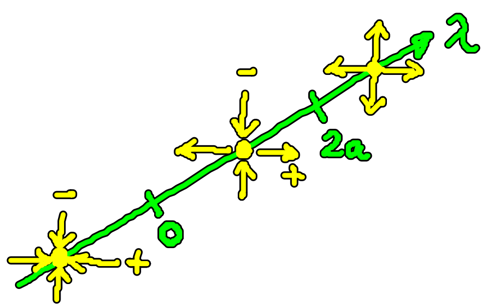
$z_{as} = z_- = r_- \exp\left[\frac{2\pi}{P_-} t\right]$ mit $\boxed{\begin{aligned} & r_- = \sqrt{-(\lambda - 2a)} \\ \text{Periode} \quad & P_- = \frac{2\pi}{1 + r_-^2 \gamma} = \frac{2\pi}{1 - (\lambda - 2a)\gamma} \end{aligned}}$

Fazit: Gegenphasiger period. Orbit verschwindet in einem Hopf-Bif. bei $\lambda = 2a$

Fixpkt. stabil — 0 — 2a

(0) instab. Richt. — instab. in + Richt. — instab. in + und − Richt. } (4) instab. Richt. des Fixpkts

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



Wunsch: Stabilisierung der periodischen Lösungen r_+, r_-

Möglich durch zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle

(i) r_{sync} wurde in 3.2.2 durch Wahl $\tau = P_+$ stabilisiert

(ii) r_{as} stabilisierbar durch zeitverzögerte Rückkopplungskontr. mit halber Periode $\tau = \frac{P_-}{2}$

(Stab. des Fixp. soll umgedreht werden: + −)

Begründung: $z_-\left(t - \frac{P_-}{2}\right) = r_- \exp\left(\frac{2\pi i \left(t - \frac{P_-}{2}\right)}{P_-}\right)$

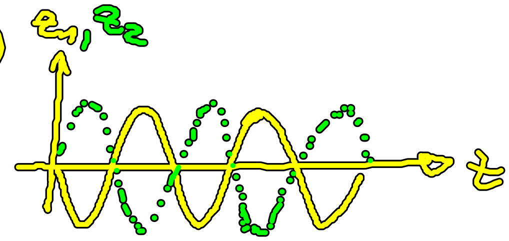
$= \underbrace{r_- \exp\left(\frac{2\pi i t}{P_-}\right)}_{z_-(t)} \underbrace{\exp(-\pi i)}_{-1}$

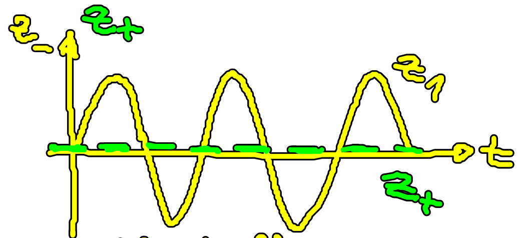
$$= -z_-(t)$$

$$\Rightarrow z_1(t) = \underbrace{z_+}_{0} + z_- = z_-(t) = -z_-\left(t-\frac{P_-}{2}\right) = z_2\left(t-\frac{P_-}{2}\right)$$

analog: $z_2(t) = z_1\left(t - \frac{P_-}{2}\right)$

gegenphasige Osz.





Systemgl. mit <u>nichtinvasiver</u> Kontrolle: $b \in \mathbb{C}$

$$\text{(I)}\quad \dot z_1 = f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b\underbrace{\left(z_2(t-\tau) - z_1(t)\right)}_{=0 \text{ für } \tau = \frac{P_-}{2} \text{ auf } Z_-}$$

$$\text{(II)}\quad \dot z_2 = f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b\underbrace{\left(z_1(t-\tau) - z_2(t)\right)}_{=0 \text{ für } \tau = \frac{P_-}{2} \text{ auf } Z_-}$$

NB: Diese Kontrolle ist <u>invasiv</u> auf dem gleichphasigen Orbit z_+!

<u>Frage</u>: Welche b stabilisieren z_-?

in z_+ und z_--Koord. lauten Gln. (I), (II):

$$\text{(I')}\quad \dot z_+ = \frac12\left(f(z_++z_-) + f(z_+-z_-)\right) + b\left(z_+(t-\tau) - z_+(t)\right)$$

$$\text{(II')}\quad \dot z_- = \frac12\left(f(z_++z_-) + f(z_+-z_-)\right) - 2az_- - b\left(z_-(t-\tau) - z_-(t)\right)$$

Strategie zum Nachweis der Stabilisierung von $z_- = r_- e^{i\varphi}$:

Untersuche Stabilität des Fixpunktes im Ursprung!

$\Rightarrow$ Linearisiere (I'), (II') um $z_1 = z_2 = 0$ $(z_+ = z_- = 0)$

$$\dot z_+ = \frac12\left[(\lambda+i)(z_+ + \cancel{z_-}) + (\lambda+i)(z_+ - \cancel{z_-})\right] + b\left[z_+(t-\tau) - z_+(t)\right]$$

$$= (\lambda+i)z_+ + b\left(z_+(t-\tau) - z_+(t)\right)$$

$$\dot z_- = (\lambda - 2a + i)z_- - b\left(z_-(t-\tau) - z_-(t)\right)$$

NB: Linearisierung entkoppelt z_+ und z_-

Ansatz $z_\pm \sim e^{\eta t}$ (η Eigenwert)

Untersuche Stabilität des Fixpkts. bei $\lambda = 2a$ mit $\tau = \frac{p_-}{2}$

$$\Rightarrow \tau = \frac{p_-}{2} = \frac{2\pi}{2(1-(\lambda-2a)\mu)} \underset{\uparrow}{=} \pi$$

$\lambda = 2a$ (am Bif. pkt. von z_{as})

char. Gln. (am Bif. pkt $\lambda = 2a$):

$$z_+ : \quad 0 = \lambda + i + b\left(e^{-\eta\tau} - 1\right) - \eta$$

$$= 2a + i + b\left(e^{-\eta\pi} - 1\right) - \eta \qquad (*)_+$$

$$z_- : \quad 0 = \cancel{2a} - \cancel{2a} + i - b\left(e^{-\pi\eta} - 1\right) - \eta \qquad (*)_-$$