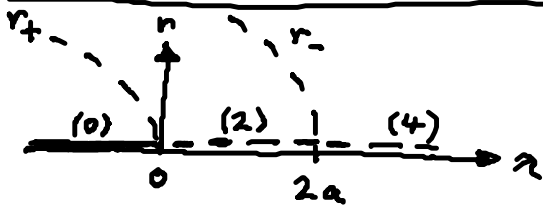


Zwei gekoppelte Hopf-Normalformen



$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= f(z_1) + a(z_2 - z_1) + b(z_2(t-\tau) - z_1(t)) \\ \dot{z}_2 &= f(z_2) + a(z_1 - z_2) + b(z_1(t-\tau) - z_2(t)) \end{aligned}$$

Stabilisierung des gegenphas. Orbits: $\tau = \pi$
 $= \frac{\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned} z_+ : z &= \lambda + i + b(e^{-i\pi z} - 1) \quad \textcircled{+} & (b=0 \Rightarrow z = \lambda + i \\ & & \text{bei } \lambda = 2a > 0 \text{ instab. in } +) \\ z_- : z &= \underbrace{\lambda - 2a + i}_{0 \text{ am Bif. pt. v. } z_-} - b(e^{-i\pi z} - 1) \quad \textcircled{-} & (b=0 \Rightarrow \text{bei } \lambda = 2a : z = i \\ & & \text{Bif. von } z_- = z_{as}) \end{aligned}$$

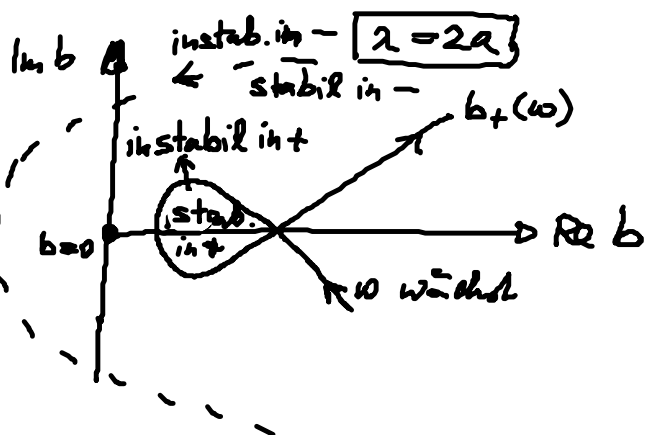
Suche Hopf-Kurven in $(\text{Re } b, \text{Im } b)$ -Ebene, die $\text{Re } z = 0$ erfüllen, d.h. Grenzen, an denen sich die instab. Dimension des Fixpunktes ändert. Dann wird delay-induzierter Orbit generiert, der zum Stabilitätszustand mit dem gegenphasigen Pyragas-Orbit gebracht wird (transkrit. Bif.).

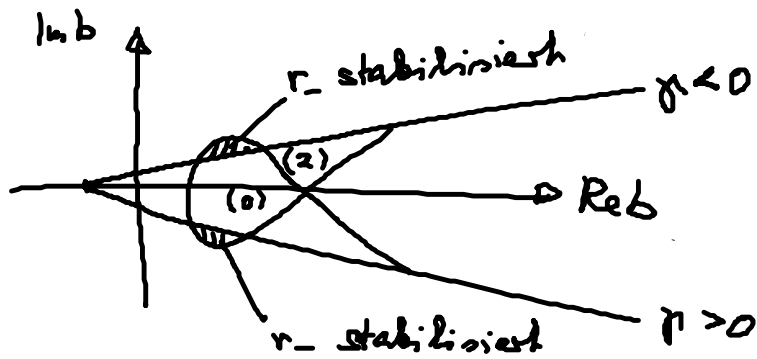
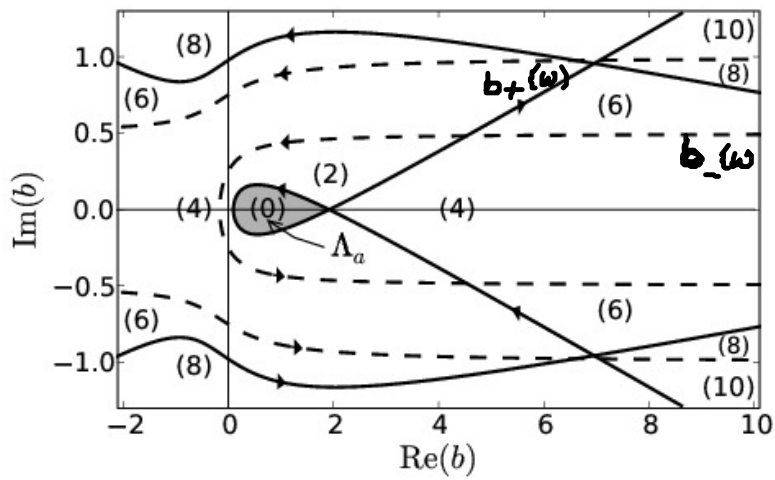
Parametrisierung der Hopf-Kurven ($z = 0 + i(1 + 2\omega)$) $b = b(\omega)$

→ Einsetzen in $\textcircled{+}$ und Umformen nach b liefert $b_+(\omega)$ Kurve
 → Einsetzen $\textcircled{-}$ liefert $b_-(\omega)$

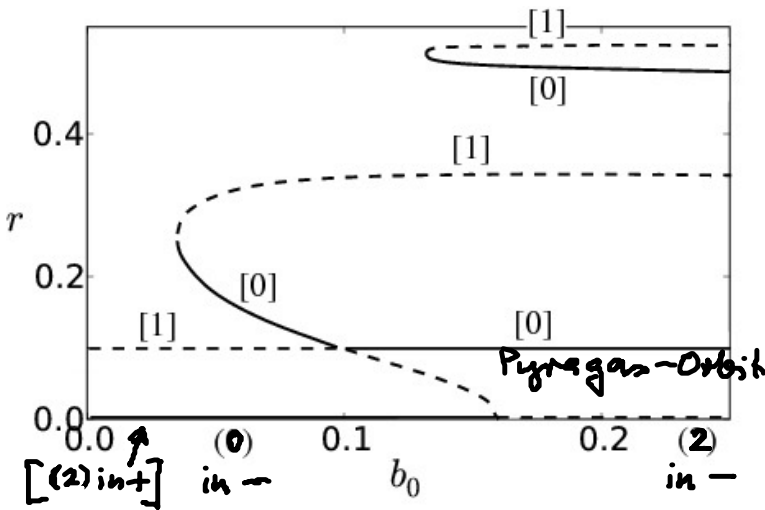
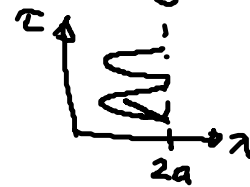
$$b_+(\omega) = 2 \frac{a - i\omega}{1 + \exp(-2\pi i \omega)} = a + \omega \tan(\pi \omega) + i(-\omega + a \tan \pi \omega)$$

$$b_-(\omega) = 2 \frac{i\omega}{-1 + \exp(-2\pi i \omega)} = -\omega \cot(\pi \omega) - i\omega$$





zusätz. Bed., damit
- Richtung instabil wird

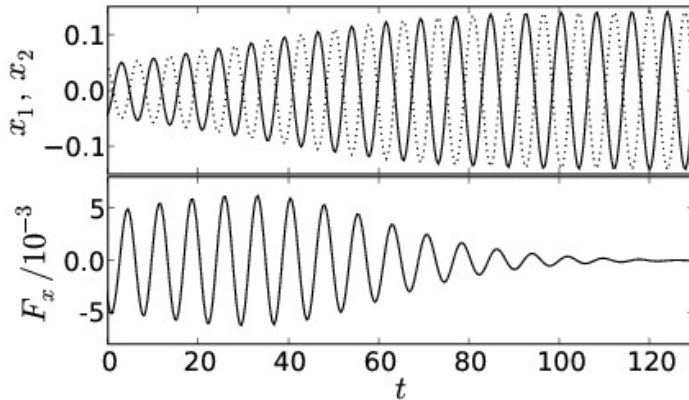


$$\lambda = 2a - 0.01, \quad a = 0.1$$

$$\gamma = -10$$

$$b = b_0 e^{i\frac{\pi}{8}}$$

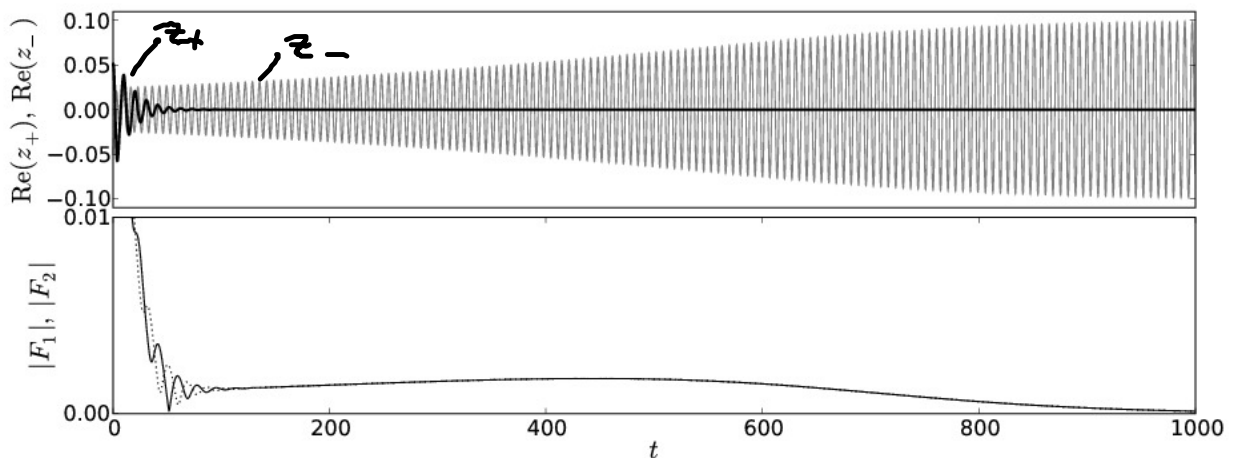
$$b_0 = 0.84$$



gegenphasiger Orbit
stabilisiert!
 $\text{Re } z_1(t) = x_1(t) = x_2(t - \frac{L_-}{2})$
" π

Kontrollkraft $\rightarrow 0$

$\text{Re } z_{\pm} \rightarrow 0 \dots$



Zusammenfassung:

- 2 gekoppelte Hopf-Normalformen
 - sync-Orbit stabilisierbar wie in Kap. 3 mit $\tau = p_+$
 - gegenphasiger Orbit stabilisierbar mit $\tau = \frac{L_-}{2}$
für bestimmte Rückkopplungstärken $b \in \mathbb{C}$
 - mit $b \neq 0$ entstehen neue Delay-induzierte gegenphasige Orbits zusätzlich zum Orbit z_-

4.2 Netzwerke

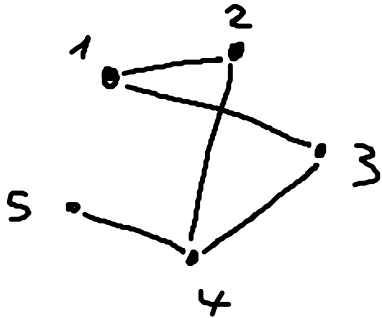
ausgehend von 2 gekoppelten Elementen \rightarrow viele

Kopplung : links (Kanten eines Graphen)

Elemente : nodes (Knoten) im Netzwerk

- Topologie : Welche Knoten sind gekoppelt ?
- Kopplungschema : wie sind die Knoten gekoppelt (welche Variable)?

4.2.1 Topologie des Netzwerkes



$N \times N$ Matrix, N Zahl der Knoten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hier : nicht gerichtete Kopplung
(birektional)

$\underline{\underline{A}}$ adjacency matrix (Nachbarschaftsmatrix)

$\underline{\underline{A}}$ symmetrisch

$$a_{ij} = 1, \text{ falls Koppel. } i \leftrightarrow j \\ = 0 \text{ sonst}$$

Erweiterung auf gerichtete Kopplung \rightarrow $\underline{\underline{A}}$ nicht mehr symmetrisch

" auf gerichtete Kopplungs \rightarrow a_{ij} nicht nur auf Werte 0 oder 1 beschränkt ($a_{ij} \in \mathbb{R}$)

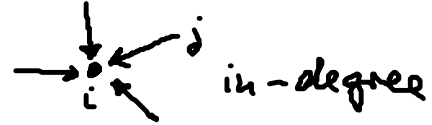
stattdessen von $\underline{\underline{A}}$ spricht man

von Kopplungsmatrix G

g_{ij} : Stärke der Kopplung

• Charakterisierung der Topologie durch bestimmte Kenngrößen:

Knotenordnung
(degree) $k_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ (Zahl der angekoppelten E!.)



Verteilung von k : $P(k)$ Wahrscheinl., einen Knoten mit Ordnung k zu finden

mittlere Knotenordnung $\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} P(k) k$