- $\boxed{\text{Kenntnis aller } \langle x^n \rangle \longleftrightarrow P(x)}$

Beweis: b)

b) Charakteristische Funktion und Kumulanten

- **Def:** $$\boxed{G(k) = \int dx\, e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle} \quad (3.13)$$

... charakt. Funktion

$$\boxed{\begin{aligned} &\longrightarrow \quad \langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \left.\frac{d^n G(k)}{dk^n}\right|_{k=0} \\ &\xrightarrow{\text{Taylor}} \quad G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle \end{aligned}} \quad (3.14)$$

$$\longrightarrow \text{FT}^{-1} \quad P(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} G(k)$$

$$\text{insbes.} \quad e^{ikx_0} G(k) = \langle e^{-ik(x-x_0)} \rangle = \sum \frac{(-ik)^n}{n!} \langle (x-x_0)^n \rangle \quad (3.15)$$

- erzeugende Funktion für Kumulanten:

$$\boxed{\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \quad \longleftrightarrow \quad \langle x^n \rangle_c = \left.\frac{\partial^n}{\partial(-ik)^n} \ln G(k)\right|_{k=0}} \quad (3.16)$$

erzeugende Fkt. ... Kumulanten

Bestimmung der $\langle x^n \rangle_c$:

Entwickle $\ln G(k) \underset{(3.14)}{=} \ln\Big(1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle}_{\varepsilon}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\varepsilon^m}{m}$

Sortiere Glieder nach k^n oder gleiche Potenzen von x:

$$\boxed{\begin{aligned}
k^1: \quad & \langle x \rangle_c = \langle x \rangle \\
k^2: \quad & \langle x^2 \rangle_c = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \overset{(3.10)}{=} \Delta x^2 \\
k^3: \quad & \langle x^3 \rangle_c = \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3 \\
& = \langle (x - \langle x \rangle)^3 \rangle \\
k^4: \quad & \langle x^4 \rangle_c = \ldots \neq \langle (x - \langle x \rangle)^4 \rangle \\
& = \langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12 \langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 \\
& - 6\langle x \rangle^4
\end{aligned}} \qquad (3.17)$$

... „wesentliche Momente" von $P(x)$

n Punkt-Korrelationen

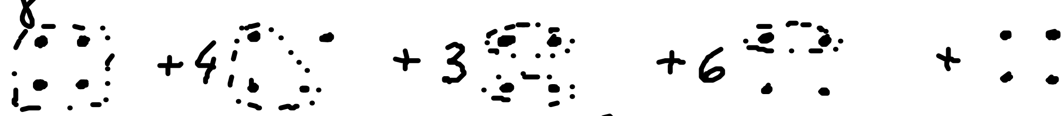
• Umkehrung:

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle x \rangle &= \langle x \rangle_c \\
\langle x^2 \rangle &= \langle x^2 \rangle_c + \langle x \rangle_c^2 \\
\langle x^3 \rangle &= \langle x^3 \rangle_c + 3\langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c + \langle x \rangle_c^3 \\
\langle x^4 \rangle &= \langle x^4 \rangle_c + 4\langle x^3 \rangle_c \langle x \rangle_c + 3\langle x^2 \rangle_c^2 + 6\langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 \\
&\quad + \langle x \rangle_c^4
\end{aligned}} \qquad (3.18)$$

$\binom{3}{2} = 3$

• graphische Darstellung:

Bsp. $\langle x^4 \rangle =$



$\langle x^4 \rangle_c \qquad \langle x^3 \rangle_c \langle x \rangle_c \qquad \langle x^2 \rangle_c^2 \qquad \langle x^2 \rangle_c \langle x \rangle_c^2 \qquad \langle x \rangle_c^4$

• allgemein (ohne Beweis):

$$\boxed{\langle x^m \rangle = \sum_{\{p_n\}} m! \prod_n \frac{1}{p_n! \, (n!)^{p_n}} \langle x^n \rangle_c^{p_n}} \qquad (3.18a)$$

p_n ... Ordnung des Momentes = "Cluster"

$\sum_{\{p_n\}}$ ... über alle Cluster-Gruppen mit $\sum_n n p_n = m$

$\prod_n \frac{m!}{p_n! (n!)^{p_n}}$ ... mögliche Realisierung der Clustergruppe $\{p_n\}$

• Bsp: Gaußsche Verteilung (3.12) [Beweis: Übungen]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

(i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} - ikx_0\right]$ (3.19)

(ii) $\ln G(k) = -ikx_0 - \frac{k^2\sigma^2}{2} \xrightarrow[(3.16)]{}$ $\boxed{\begin{aligned} \langle x \rangle_c &= x_0 \\ \langle x^2 \rangle_c &= \sigma^2 \end{aligned}}$

$\langle x^3 \rangle_c = \langle x^4 \rangle_c = \ldots = 0!$

bestimmen Gaußsche Verteilung

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen

(i) Binomial-Verteilung

• Geg: Einzelexperiment mit 2 Ausgänge (ja, nein für spezielles Ereignis) also: $x = A, B$ mit $P(A) = p$

$P(B) = q = 1-p$

Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimenten

$$\boxed{P_N(N_A) = \underbrace{\binom{N}{N_A}}_{\frac{N!}{N_A!(N-N_A)!}} p^{N_A} q^{N-N_A}} \qquad (3.21)$$

... Binomialkoeffizient

• Bsp: (1) Würfel: A ... werfe 6, $P(A) = p = \frac{1}{6}$

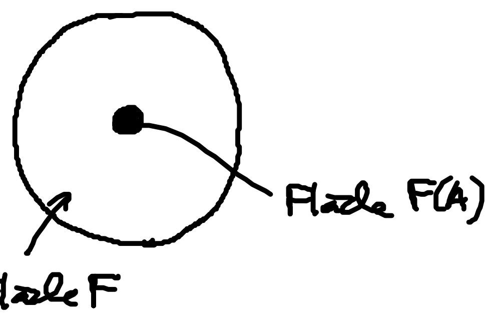
B ... " keine 6, $P(B) = q = \frac{5}{6}$

(2) Münze: A .. Kopf, B ... Zahl

(3) Dart „ohne Geschicklichkeit"

A ... treffe ●, $P(A) = \frac{F(A)}{F}$

B ... treffe Rest, $P(B) = 1 - P(A)$



• charakt. Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = \sum_{N_A} e^{-ikN_A} P_N(N_A) \overset{(3.21)}{=} \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} (pe^{-ik})^{N_A} q^{N-N_A}$$

$$G_N(k) = (pe^{-ik} + q)^N$$

$$\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = Npq$$

Beweis: jetzt

1. $\ln G_N(k) = N \underbrace{\ln(pe^{-ik} + q)}_{\ln G_1(k):\ \text{für ein Versuch}}$

$\longrightarrow$ Kumulanten für N Versuche

$= N \times$ Kumulante für 1 Versuch

2. Kumulante:

ein Versuch: Momente $\langle N_A^n \rangle = 1^n p + 0^n q = p$

N Versuche: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = N p$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = \langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2$$

$$= N (p - p^2) = N p q$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \; !$$

Mittelwert immer schärfer für $N \longrightarrow \infty$

- Grenzfall $N \to \infty$:

$$P_N(N_A) \xrightarrow[\text{zentraler Grenzwertsatz}]{} \text{Gaußsche Verteilung}$$

(s. Kap. 3.5)

(ii) <u>Poisson-Verteilung</u>

- <u>Geg:</u> Voneinander unabhängige, „seltene" Ereignisse in festem Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...) die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen

<u>Ges:</u> Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelergebnisse mit $\langle x \rangle = \lambda$

<u>o.B.</u> $\rightarrow$

$$\boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \quad , \; x = 0, 1, 2, \dots \qquad (3.22.)$$

- Bsp: (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

Anzahl mittlerer Zerfälle: $\lambda = \alpha T$, α ... Zerfallrate

$$\longrightarrow \quad p_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

... Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

(2) Dart mit $\underbrace{F(A) \ll F}_{\text{Treffer ist seltenes Ereignis}}$ (s.u. für Verbindung zur Binomialverteilung)

- charakt. Funktion:

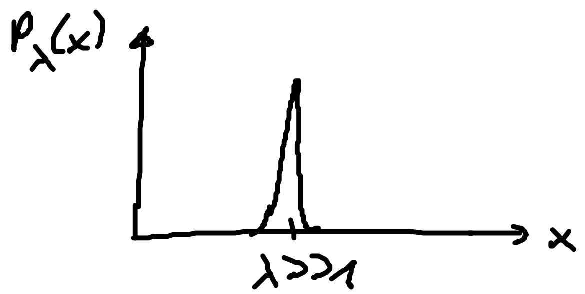
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} (\lambda e^{-ik})^x e^{-\lambda}$$

$$= \exp\left[\lambda\left(e^{-ik} - 1\right)\right]$$

$$\rightarrow \ln G(k) = \lambda\left(e^{-ik} - 1\right) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!}$$

$$\xrightarrow{(3.16)} \boxed{\text{Kumulanten: } \langle x^n \rangle_c = \lambda}$$

insbesondere: $\dfrac{\Delta x}{\lambda} = \dfrac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$



- Herleitung von $p_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung, (3.21):

$p \to 0$ („seltenes Ereignis")

$N \to \infty$

so daß $\langle N_A \rangle = N p = \lambda = $ konst.

$$\boxed{p_N(N_A) \longrightarrow p_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!}} \quad (3.26)$$

Beweis: Übung!