- $\boxed{\text{Kenntnis aller } \langle x^n \rangle \longleftrightarrow P(x)}$

Beweis: b)

b) Charakteristische Funktion und Kumulanten

- Def.: $\boxed{G(k) = \int dx\, e^{-ikx} P(x) = \langle e^{-ikx} \rangle}$ (3.13)

... charakt. Funktion

$$\longrightarrow \langle x^n \rangle = \frac{1}{(-i)^n} \frac{d^n G(k)}{dk^n}\bigg|_{k=0} \qquad (3.14)$$

$$\xrightarrow{\text{Taylor}} G(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

$$\longrightarrow FT^{-1} \quad P(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} G(k)$$

insbes. $e^{ikx_0} G(k) = \langle e^{-ik(x-x_0)} \rangle = \sum \frac{(-ik)^n}{n!} \langle (x-x_0)^n \rangle$ (3.15)

- erzeugende Funktion für Kumulanten:

$$\boxed{\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c \longleftrightarrow \langle x^n \rangle_c = \frac{\partial^n}{\partial(-ik)^n} \ln G(k)\bigg|_{k=0}}$$

(3.16)

erzeugende Fkt.

... Kumulanten

Bestimmung der $\langle x^n\rangle_c$:

Entwickle $\ln G(k) \overset{(3.14)}{=} \ln\Big(1+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle}_{\varepsilon}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\varepsilon^m}{m}$

Sortiere Glieder nach k^n oder gleiche Potenzen von x:

$$\boxed{\begin{aligned}
k^1:&\quad \langle x\rangle_c = \langle x\rangle\\
k^2:&\quad \langle x^2\rangle_c = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \overset{(3.10)}{=} \Delta x^2\\
k^3:&\quad \langle x^3\rangle_c = \langle x^3\rangle - 3\langle x^2\rangle\langle x\rangle + 2\langle x\rangle^3\\
&\qquad\quad = \langle (x-\langle x\rangle)^3\rangle\\
k^4:&\quad \langle x^4\rangle_c = \ldots \neq \langle (x-\langle x\rangle)^4\rangle\\
&\qquad\quad = \langle x^4\rangle - 4\langle x^3\rangle\langle x\rangle - 3\langle x^2\rangle^2 + 12\langle x^2\rangle\langle x\rangle^2\\
&\qquad\qquad - 6\langle x\rangle^4
\end{aligned}} \qquad (3.17)$$

... „wesentliche Momente“ von $P(x)$

n Punkt-Korrelationen

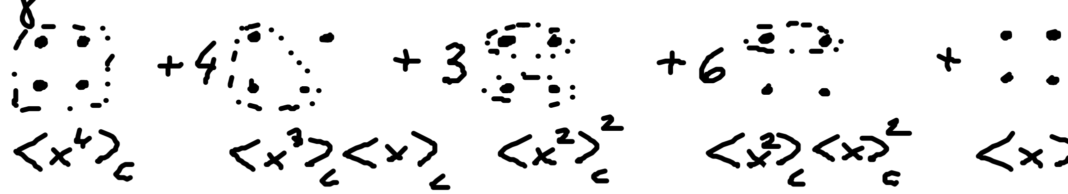
• Umkehrung:

$$\boxed{\begin{aligned}
\langle x\rangle &= \langle x\rangle_c\\
\langle x^2\rangle &= \langle x^2\rangle_c + \langle x\rangle_c^2\\
\langle x^3\rangle &= \langle x^3\rangle_c + 3\langle x^2\rangle_c\langle x\rangle_c + \langle x\rangle_c^3\\
\langle x^4\rangle &= \langle x^4\rangle_c + 4\langle x^3\rangle_c\langle x\rangle_c + 3\langle x^2\rangle_c^2 + 6\langle x^2\rangle_c\langle x\rangle_c^2\\
&\quad + \langle x\rangle_c^4
\end{aligned}} \qquad (3.18)$$

$\binom{3}{2} = 3$

• graphische Darstellung:

Bsp. $\langle x^4\rangle =$



$\langle x^4\rangle_c \qquad \langle x^3\rangle_c\langle x\rangle_c \qquad \langle x^2\rangle_c^2 \qquad \langle x^2\rangle_c\langle x\rangle_c^2 \qquad \langle x\rangle_c^4$

- allgemein (ohne Beweis):

$$\boxed{\langle x^m \rangle = \sum_{\{p_n\}} m! \prod_n \frac{1}{p_n! (n!)^{p_n}} \langle x^n \rangle_c^{p_n}} \quad (3.18a)$$

p_n ... Ordnung des Momentes = "Cluster"

$\sum_{\{p_n\}}$ ... über alle Cluster-Gruppen mit $\sum_n n p_n = m$

$\prod_n \frac{m!}{p_n!(n!)^{p_n}}$ ... mögliche Realisierung der Clustergruppe $\{p_n\}$

- Bsp: Gaußsche Verteilung (3.12) [Beweis: Übungen]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

(i) $G(k) = \exp\left[-\frac{k^2\sigma^2}{2} - ikx_0\right]$ (3.19)

(ii) $\ln G(k) = -ikx_0 - \frac{k^2\sigma^2}{2} \xrightarrow[(3.16)]{} \boxed{\begin{aligned} \langle x \rangle_c &= x_0 \\ \langle x^2 \rangle_c &= \sigma^2 \end{aligned}}$

$\langle x^3 \rangle_c = \langle x^4 \rangle_c = \ldots = 0!$

bestimmen Gaußsche Verteilung

3.3 Beispiele

a) Diskrete Verteilungen

(i) Binomial-Verteilung

- Geg: Einzelexperiment mit 2 Ausgänge (ja, nein für spezielles Ereignis)

also: $x = A, B$ mit $P(A) = p$
$P(B) = q = 1-p$

Ges: Wahrscheinlichkeit für N_A Ausgänge A bei N Einzelexperimenten

$$\boxed{P_N(N_A) = \underbrace{\binom{N}{N_A}}_{\frac{N!}{N_A!(N-N_A)!}} p^{N_A} q^{N-N_A}} \qquad (3.21)$$

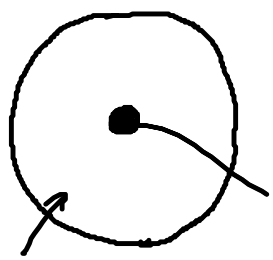
$\frac{N!}{N_A!(N-N_A)!}$ ... Binomialkoeffizient

- Bsp: (1) Würfel: A ... werfe 6, $P(A) = p = \frac{1}{6}$
  B ... " keine 6, $P(B) = q = \frac{5}{6}$

  (2) Münze: A.. Kopf, B ... Zahl

  (3) Dart „ohne Geschicklichkeit"

  A ... treffe ●, $P(A) = \frac{F(A)}{F}$
  B ... treffe Rest, $P(B) = 1 - P(A)$



- charakt. Funktion:

$$G_N(k) = \langle e^{-ikN_A} \rangle = \sum_{N_A} e^{-ikN_A} P_N(N_A) \overset{(3.21)}{=} \sum_{N_A} \binom{N}{N_A} (pe^{-ik})^{N_A} q^{N-N_A}$$

$$G_N(k) = (pe^{-ik} + q)^N$$

$$\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = Np$$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = Npq$$

Beweis: jetzt

1. $\ln G_N(k) = N \underbrace{\ln(pe^{-ik} + q)}_{\ln G_1(k):\ \text{für ein Versuch}}$

$\longrightarrow$ Kumulanten für N Versuche

$= N \times$ Kumulante für 1 Versuch

2\. Kumulante:

ein Versuch: Momente $\langle N_A^n \rangle = 1^n p + 0^n q = p$

N Versuche: $\langle N_A \rangle = \langle N_A \rangle_c = N p$

$$\langle N_A^2 \rangle_c = (\Delta N_A)^2 = \langle N_A^2 \rangle - \langle N_A \rangle^2$$

$$= N (p - p^2) = N p q$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\Delta N_A}{N} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{N}} \ !$$

Mittelwert immer schärfer für $N \to \infty$

- Grenzfall $N \to \infty$:

$P_N(N_A) \longrightarrow$ Gaußsche Verteilung

zentraler Grenzwertsatz (s. Kap. 3.5)

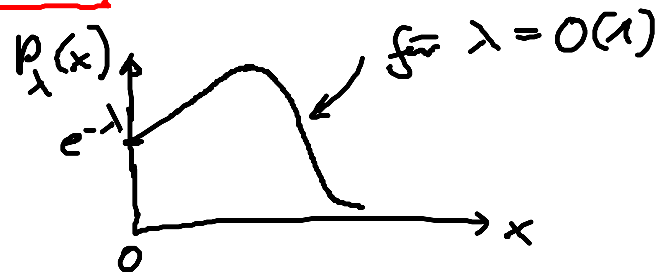
(ii) <u>Poisson-Verteilung</u>

- <u>Geg.</u>: Voneinander unabhängige, „seltene" Ereignisse in festem Bereich (Zeit, Strecke, Fläche, ...) die mit gleicher Wahrscheinlichkeit vorkommen

<u>Ges.</u>: Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für x Einzelergebnisse mit $\langle x \rangle = \lambda$

<u>o.B.</u> $\rightarrow$ (3.22.)

$$\boxed{P_\lambda(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} \quad , \; x = 0, 1, 2, \ldots$$



• Bsp: (1) radioaktiver Zerfall in Zeit T

Anzahl mittlerer Zerfälle: $\lambda = \alpha T$, α ... Zerfallrate

$$\longrightarrow \quad P_T(x) = \frac{(\alpha T)^x e^{-\alpha T}}{x!}$$

... Wahrscheinlichkeit für x Zerfälle in T

(2) Dart mit $\underbrace{F(A) \ll F}_{\text{Treffer ist seltenes Ereignis}}$ (s.u. für Verbindung zur Binomialverteilung)

• charakt. Funktion:

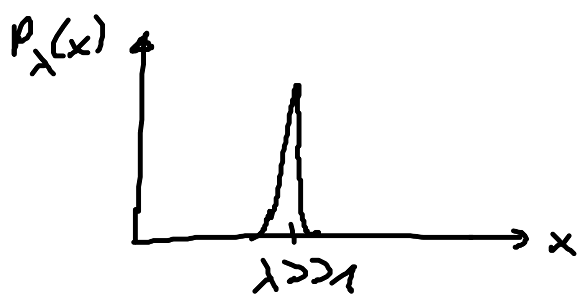
$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} (\lambda e^{-ik})^x e^{-\lambda}$$

$$= \exp\left[\lambda (e^{-ik} - 1)\right]$$

$$\rightarrow \ln G(k) = \lambda (e^{-ik} - 1) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!}$$

$$\xrightarrow{(3.16)} \quad \boxed{\text{Kumulanten: } \langle x^n \rangle_c = \lambda}$$

insbesondere: $\displaystyle \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle_c}}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$



• Herleitung von $P_\lambda(x)$ als Grenzfall der Binomialverteilung (3.21):

$p \to 0$ („seltenes Ereignis")

$N \to \infty$

so daß $\langle N_A \rangle = N p = \lambda = $ konst.

$$\boxed{P_N(N_A) \longrightarrow P_\lambda(N_A) = \frac{\lambda^{N_A} e^{-\lambda}}{N_A!}} \quad (3.26)$$

Beweis: Übung!