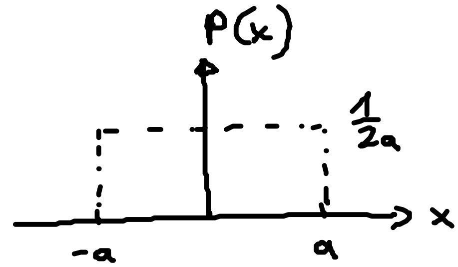
b) Kontinuierliche Verteilungen

(i) homogene Verteilung:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \qquad (3.27)$$



- Momente:

$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} a^{n+1}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew. Übungen

- charakt. Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka} \quad , \quad G(0) = 1 \; \ldots \text{ Normierung!}$$

Bew. Übungen

- Kumulanten? ...

(ii) Normal / Gaußsche Verteilung

s.o.

(iii) Exponentialverteilung:

$$P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \qquad (3.28)$$

s. Übungen

3.4. Mehrdimensionale Verteilungen

- stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$P(\underline{x})\,d^n x$ ... Wahrscheinlichkeit für $[x_1, x_1+dx_1;\ x_2, x_2+dx_2;\ \dots;\ x_n, x_n+dx_n]$

- unabhängige stochastische Variable x, y:

$$\boxed{P(x,y)\,dx\,dy = P(x)P(y)\,dx\,dy} \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

- <u>Def:</u> Korrelationsfunktion:

$$\boxed{\begin{aligned} C_{ij} &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle \end{aligned}} \quad (3.30)$$

... Kovarianzmatrix

zeigen: Korrelationen von Flukt. um $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$

<u>Bsp:</u> $P(x,y) = P(x)P(y)$

$$\longrightarrow C_{xy} = \int dx\,dy\; P(x)\,(x - \langle x \rangle)\,P(y)\,(y - \langle y \rangle)$$
$$= 0!$$

- Wahrscheinlichkeitsdichte für: $[x_1, x_1+dx_1;\ \dots;\ x_{n-1}, x_{n-1}+dx_{n-1}]$

$$\boxed{P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int dx_n\, P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)} \quad (3.31)$$

- <u>Satz:</u>

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1} \dots x_n)$ für $x_1 \dots x_k$, wenn $x_{k+1} \dots x_n$ mit Sicherheit vorliegen

$$P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) = \frac{P(x_1 \dots x_n)}{P(x_{k+1} \dots x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1} \dots x_n) = \int dx_1 \dots dx_k\; P(x_1, \dots, x_n)$.

„Beweis":

1. $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)\, P(x_{k+1} \dots x_n) = P(x_1 \dots x_n)$

2. $\int P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_k = 1$! ... Normierung

stochastische unabh. Variable: $P(x|y) = \dfrac{P(x)P(y)}{P(y)} = P(x)$!

3.5 Zentraler Grenzwertsatz

- zentraler Satz für Stat. Mechanik
- Satz:

$\boxed{\text{}}$

Seien $x_1, x_2, \dots, x_N$ voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.

Dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ im Grenzfall $N \to \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi (\Delta y)^2}}\, e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \qquad (3.33)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \Delta x^2$

Insbesondere gilt: $\dfrac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \dfrac{\Delta x}{\langle x \rangle} \dfrac{1}{\sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

• Bsp.: (i) System nicht wechselwirkender Teilchen

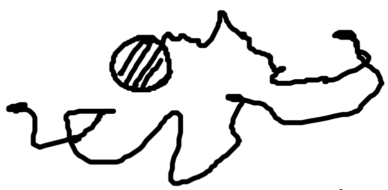
x_i = Energie des i-ten Teilchens

y = Gesamtenergie

$\hookrightarrow$ scharf = innere Energie in der Thermodynamik

(ii) Zufallsbewegung („random walk")

insbes. Brownsche Bewegung



x_i = Zuwachs beim i-ten (mikroskopischen) Schritt

(z. B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)

y = Position nach N Schritten

• Beweis:

Führe ein: $$z(\{x_i\}) = \sum_i \frac{x_i - \langle x\rangle}{\sqrt{N}} = \frac{y - N\langle x\rangle}{\sqrt{N}} \qquad (3.39)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(z) \overset{(3.8)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

$$= \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1)\dots w(x_N)}_{\text{„unabh. Ereignisse"}} \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N}\langle x\rangle\right)$$

$$\left[\delta(\dots) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik\dots}\right] = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int \underline{dx_1} \dots dx_N \, \underline{w(x_1)} \dots w(x_N) \, \underline{e}^{-ik\frac{x_1 + \dots x_N}{\sqrt{N}} + ik\sqrt{N}\langle x\rangle}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + i\cancel{k\sqrt{N}\langle x\rangle}} \underbrace{\left[G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)\right]^N}_{\text{charakt. Fkt. zu } w(x)}$$

mit $G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \overset{(3.16)}{=} \exp\Big[\cancel{-i\frac{k}{\sqrt{N}}\underbrace{\langle x\rangle_c}_{\langle x\rangle}} - \frac{1}{2}\frac{k^2}{N}\underbrace{\langle x^2\rangle_c}_{(\Delta x)^2} + i\frac{1}{6}\frac{k^3}{N^{3/2}}\langle x^3\rangle_c + \dots$

Kumulante:

$$\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!}\langle x^n\rangle_c$$

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikz - \frac{1}{2}k^2\Delta x^2 + i\frac{1}{6}\frac{k^3}{\sqrt{N}}\langle x^3\rangle_c + \dots}$$

$N \longrightarrow \infty$

$$G_p(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2\Delta x^2}$$

$$P(z) \underset{(3.19)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}}\, e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$$

mit $p(z)\,dz = p(y)\,dy$ und $\frac{dz}{dy} \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\longrightarrow\ p(y) \overset{(3.34)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\Delta x)^2}}\, e^{-\frac{(y-N\langle x\rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}} \qquad \text{qed}$$

- Bem: (3.33) auch gültig für abhängige x_i unter gewissen Bedingungen

4. Kinetische Theorie der Gase

- Studium der makroskopischen Eigenschaften einer großen Zahl von Teilchen, ausgehend von (klass.) Bewegungsgleichungen
- Ziele:
  (i) Einführung der Boltzmann Gl.
  (ii) Herleitung makroskopischer Bew.gl.
  (iii) Motivation des zentralen Postulats der Stat. Mechanik
  (iv) Diskussion von Irreversibilität anhand der Boltzmann-Gl. und H-Theorem

4.1 Der Liouvillesche Satz und Implikationen

- System von N wechselwirkenden Teilchen

Mechanik: dessen Mikrozustand eindeutig bestimmt durch

Orte $q \equiv \{q_1, q_2 \dots, q_N\}$ und

Impulse $p \equiv \{p_1, \dots, p_N\}$

$\{q, p\}$ = Punkt im $6N$ dimen. Phasenraum Γ