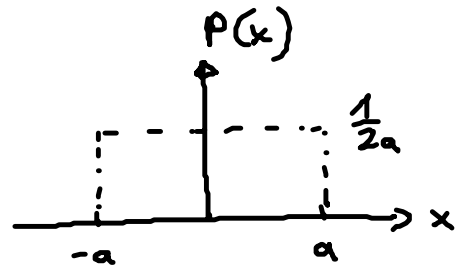


b) Kontinuierliche Verteilungen

(i) homogene Verteilung:

$$P(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (3.27)$$



• Momente:

$$\langle x^n \rangle = \begin{cases} \frac{1}{a(n+1)} a^{n+1}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bew. Übungen

• charakt. Funktion:

$$G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle = \frac{\sin ka}{ka}, \quad G(0) = 1 \dots \text{Normierung!}$$

Bew. Übungen

• Kumulanten? ...

(ii) Normal / Gaußsche Verteilung

s.o.

(iii) Exponentialverteilung:

$$P(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.28)$$

s. Übungen

3.4. Mehrdimensionale Verteilungen

• stochastische Variablen: $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$P(\underline{x}) d^n x$... Wahrscheinlichkeit für $[x_1, x_1+dx_1; x_2, x_2+dx_2; \dots; x_n, x_n+dx_n]$

• unabhängige stochastische Variable x, y :

$$P(x, y) dx dy = P(x) P(y) dx dy \quad (3.29)$$

... Multiplikationsregel

• Def: Korrelationsfunktion:

$$C_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle) (x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \quad (3.30)$$
$$= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$$

... Kovarianzmatrix

zeigt an: Korrelationen von Punkt. von $\langle x_i \rangle$ und $\langle x_j \rangle$

Bsp: $P(x, y) = P(x) P(y)$

$$\rightarrow C_{xy} = \int dx dy P(x) (x - \langle x \rangle) P(y) (y - \langle y \rangle)$$
$$= 0!$$

• Wahrscheinlichkeitsdichte für: $[x_1, x_1+dx_1; \dots; x_{n-1}, x_{n-1}+dx_{n-1}]$

$$P(x_1, \dots, x_{n-1}) = \int dx_n P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (3.31)$$

• Satz:

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$
für x_1, \dots, x_k , wenn x_{k+1}, \dots, x_n mit Sicherheit vorliegen

$$P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1}, \dots, x_n)} \quad (3.32)$$

wobei $P(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int dx_1 \dots dx_k P(x_1, \dots, x_n)$.

Beweis:

$$1. P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) P(x_{k+1} \dots x_n) = P(x_1 \dots x_n)$$

$$2. \int P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) dx_1 \dots dx_k = 1! \dots \text{Normierung}$$

stochastische unabh. Variable: $P(x|y) = \frac{P(x)P(y)}{P(y)} = P(x)!$

3.5 Zentraler Grenzwertsatz

• zentraler Satz für Stat. Mechanik

• Satz:

Seien x_1, x_2, \dots, x_N voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x)$, also insbesondere ist $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$ und $\Delta x_i = \Delta x$.

Dann genügt die Zufallsvariable $y = x_1 + x_2 + \dots + x_N$ im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\Delta y)^2} e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \quad (3.33)$$

mit $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$ und $\Delta y^2 = N \Delta x^2$

Insbesondere gilt: $\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \frac{1}{\sqrt{N}}$ also

Aussagen über y sind für große N scharf.

• Bsp: (i) System nicht wechselwirkender Teilchen

$x_i =$ Energie des i -ten Teilchens

$y =$ Gesamtenergie

↳ scharf = innere Energie in der Thermodynamik

(ii) Zufallsbewegung („random walk“)

insbes. Brownsche Bewegung



$x_i =$ Zuwachs beim i -ten (mikroskopische) Schritt
(z. B. durch Stöße der Flüssigkeitsmoleküle)

$y =$ Position nach N Schritten

• Beweis:

Führe ein: $z(\{x_i\}) = \sum_i \frac{x_i - \langle x \rangle}{\sqrt{N}} = \frac{y - N \langle x \rangle}{\sqrt{N}} \quad (3.34)$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(z) \stackrel{(3.31)}{=} \langle \delta(z - z(\{x_i\})) \rangle$$

$$= \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1) \dots w(x_N)}_{\text{„unabh. Ereignisse“}} \delta\left(z - \frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + \sqrt{N} \langle x \rangle\right)$$

$$\begin{aligned} [\delta(\dots)] &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik \dots} = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \int dx_1 \dots dx_N \underbrace{w(x_1) \dots w(x_N)}_{\text{unabh. Ereignisse}} e^{-ik \frac{x_1 + \dots + x_N}{\sqrt{N}} + ik \sqrt{N} \langle x \rangle} \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz + i k \sqrt{N} \langle x \rangle} \underbrace{\left[G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right)\right]^N}_{\text{direkt. Fkt. zu } w(x)} \end{aligned}$$

mit $G\left(\frac{k}{\sqrt{N}}\right) \stackrel{(3.16)}{=} \exp\left[-i \frac{k}{\sqrt{N}} \underbrace{\langle x \rangle}_c - \frac{1}{2} \frac{k^2}{N} \underbrace{\langle x^2 \rangle}_c + i \frac{1}{6} \frac{k^3}{N^{3/2}} \underbrace{\langle x^3 \rangle}_c + \dots\right]$

Kumulant:
 $\ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c$

$$P(z) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikz - \frac{1}{2} k^2 \Delta x^2 + i \frac{1}{6} \frac{k^3}{\sqrt{N}} \langle x^3 \rangle_c + \dots}$$

$$N \rightarrow \infty$$

$$G_p(k) = e^{-\frac{1}{2} k^2 \Delta x^2}$$

$$P(z) \stackrel{(3.19)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{z^2}{2(\Delta x)^2}}$$

mit $P(z) dz = P(y) dy$ und $\frac{dz}{dy} \stackrel{(3.31)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$\rightarrow P(y) \stackrel{(3.32)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi N(\Delta x)^2}} e^{-\frac{(y - N\langle x \rangle)^2}{2N(\Delta x)^2}} \quad \text{qed}$$

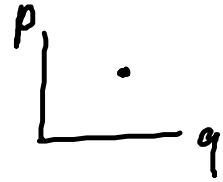
• Bem.: (3.33) auch gültig für abhängige x_i ; unter gewissen Bedingungen

4. Kinetische Theorie der Gase

- Studium der makroskopischen Eigenschaften einer großen Zahl von Teilchen, ausgehend von (klass.) Bewegungsgleichungen
- Ziele: (i) Einführung der Boltzmann-Gl.
 (ii) Herleitung makroskopischer Bew. gl.
 (iii) Motivation des zentralen Postulats der Stat. Mechanik
 (iv) Diskussion von Irreversibilität anhand der Boltzmann-Gl. und H-Theorem

4.1 Der Liouville'sche Satz und Implikationen

- System von N wechselwirkenden Teilchen
Mechanik: dessen Mikrozustand eindeutig bestimmt durch
Orte $q \equiv \{q_1, q_2, \dots, q_N\}$ und
Impulse $p \equiv \{p_1, \dots, p_N\}$



$\{q, p\}$ = Punkt im $6N$ dimen. Phasenraum Γ