

4.2 Die BBGKY-Hierarchie

$$\cdot \mathcal{S}_s(q_1, p_1, \dots, q_s, p_s, t) = \int \prod_{i=s+1}^N dV_i \mathcal{S}(q_1, p_1, \dots, q_{s+1}, p_{s+1}, \dots, q_N, p_N, t)$$

mit $dV_i = d^3 q_i d^3 p_i$ (4.8)

$$f_s = \frac{N!}{(N-s)!} \mathcal{S}_s \quad \dots \quad s\text{-Teilchendichte} \quad (4.9)$$

• Bew. gln. für f_s bzw \mathcal{S}_s :

$$H = H_s + H_{N-s} + H'$$

$$H_s = \sum_{i=1}^s \left[\frac{p_i^2}{2m} + U(q_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i,j) \neq 1}}^s V(q_i - q_j)$$

$$H_{N-s} = \sum_{i=s+1}^N \left[\dots \right] + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=s+1 \\ i \neq j}}^N \dots$$

$$H' = \sum_{i=1}^s \sum_{m=s+1}^N V(q_i - q_m)$$

(ii) Bew. gln.

$$\frac{\partial \mathcal{S}_s}{\partial t} = \int \prod_{i=s+1}^N dV_i \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \stackrel{(4.5)}{=} - \int \prod_{i=s+1}^N dV_i \{ \mathcal{S}, H_s + H_{N-s} + H' \}$$

- ① _____
- ② _____
- ③ _____

$$\textcircled{1} = \left\{ \int \prod_{i=s+1}^N dV_i \mathcal{S}, H_s \right\} \stackrel{(4.8)}{=} \{ \mathcal{S}_s, H_s \}$$

$$\textcircled{2} = \int_{i=st+1}^N \Pi dV_i \quad \{S, H_{N-s}\} = 0!$$

$$\sum_{j=st+1}^N \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \cdot p_j - \frac{\partial S}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H_{N-s}}{\partial q_j} \right)$$

Oberflächenterm = 0

Oberflächenterm = 0

$$\int dq_n \frac{\partial S}{\partial q_n} = S \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$\textcircled{3} = \int_{i=st+1}^N \Pi dV_i; \quad \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H'}{\partial p_j} - \frac{\partial S}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H'}{\partial q_j} \right) = 0$$

$$- \sum_{n=1}^s \frac{\partial S}{\partial p_n} \cdot \sum_{m=st+1}^N \frac{\partial V(q_n - q_m)}{\partial q_n} - \sum_{m=st+1}^N \frac{\partial S}{\partial p_m} \cdot \sum_{n=1}^s \dots$$

$$(N-s) \frac{\partial V(q_n - q_{st+1})}{\partial q_n}$$

Oberflächenterm = 0

$$= - (N-s) \sum_{n=1}^s \int dV_{st+1} \frac{\partial V(q_n - q_{st+1})}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial}{\partial p_n} \left[\int_{i=st+2}^N \Pi dV_i S \right]$$

S_{st+1}

(4.11)

$-(\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3})$

$$\frac{\partial S_s}{\partial t} - \{H_s, S_s\} = (N-s) \sum_{n=1}^s \int dV_{st+1} \frac{\partial V(q_n - q_{st+1})}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial S_{st+1}}{\partial p_n}$$

bzw: (4.11) $\frac{N!}{(N-s)!} \rightarrow$

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} - \{H_s, f_s\} = \sum_{n=1}^s \int dV_{st+1} \frac{\partial V(q_n - q_{st+1})}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial f_{st+1}}{\partial p_n} \quad (4.12)$$

„Strömungsterm“

„Stoßterm“

der s Teiler mit restlichen N-s Teiler

\rightarrow Hierarchie von Gln.

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \dots = \dots f_2$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} \dots = \dots f_3$$

⋮

→ zur Behandlung ist Abbruchbedingung nötig!

4.3 Die Boltzmann-Gleichung

4.3.1 "Herleitung" bzw. Motivation

• Bewgl. für f_1 : (4.12)

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \{H_1, f_1\} = \int dV_2 \frac{\partial V(q_1 - q_2)}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial p_1} \quad (4.13)$$

• Abbruchbedingung + "Vergrößerung":

$$f_2(q_1, p_1, q_2, p_2, t) \longrightarrow f_1(q, p_1, t) f_1(q, p_2, t) \quad (4.14)$$

Bem: (i) Annahme: Potential $V(q_1 - q_2)$ hat eine endliche Reichweite d

→ $q_1 - q_2 \gg d$ keine 2-Teilchen-Korrelationen

≙ molekulares Chaos

(ii) Fätre ein: Stoßpkt. q der Teilchen

→ Vergrößerung der Längenskala

" " Zeitskala

} Stoß wird räumlich/
zeitlich nicht aufgelöst

≙ Informationsverlust

• Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad f_1(q, p_1, t) &= f(q, p, t) = f \\ f_i(q, p_i, t) &= f(q, p_i, t) = f_i, \quad i \geq 2 \end{aligned} \right\} (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(ii)} \quad \{H_1, f\} &= \frac{\partial H_1}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \cdot \frac{\partial f}{\partial q}, \quad H_1 = \frac{p^2}{2m} + U(q) \\ &= -\underline{F} \cdot \nabla_p f - \frac{p}{m} \cdot \nabla_q f \quad \text{mit } \underline{F} = -\nabla_q U \dots \text{äußere Kraft} \end{aligned} \right\} (4.16)$$

• Boltzmann-Gl. (4.15), (4.16) in (4.13)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} p \cdot \nabla_q + \underline{F} \cdot \nabla_p \right) f(q, p, t) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}}$$

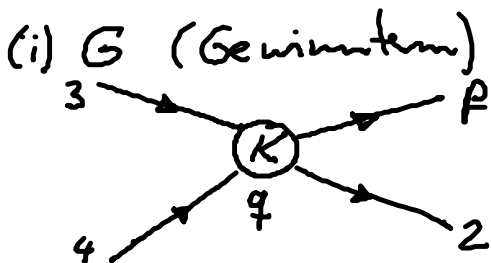
$$\text{mit } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 K(p, p_2; p_3, p_4) [f_3 f_4 - f f_2] \quad (4.17)$$

$$= G - V \quad \dots \text{Boltzmannsche Stoßzahlansatz}$$

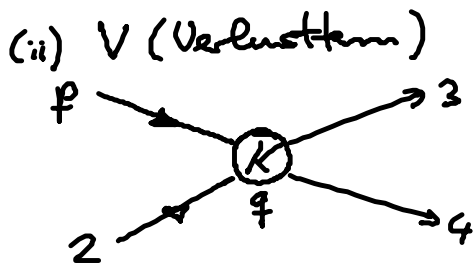
$G \int d^3 q d^3 p$... Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in $\int d^3 q d^3 p$ hinein aus $\int d^3 q d^3 p$ heraus gestreut werden

Bedeutung: Änderung von f durch Stoßprozesse:

$K(p, p_2; p_3, p_4) \dots$ Übergangswahrscheinlichkeit für $p_3, p_4 \rightarrow p, p_2$



„erzeugt“ Teilchen mit Impuls p



„vernichtet“ Teilchen mit Impuls p

(iii) $K(\dots) f_i f_j d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 \dots$ Zahl der Stoßprozesse
pro Zeiteinheit im
Volumen $d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4$

• Symmetrien von K :

(i) Vertauschbarkeit der Teilchen:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(p_2, p_1; p_4, p_3) \quad (4.18)$$

(ii) Isotropie des Raumes: sei $D \in O(3)$

$$K(Dp_1, Dp_2; Dp_3, Dp_4) = K(p_1, p_2; p_3, p_4) \quad (4.19)$$

insbesondere: $Dp = -p$

(iii) Zeitumkehrinvarianz:

$$K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(-p_3, -p_4; -p_1, -p_2) \quad (4.20)$$

$$(ii), (iii) \rightarrow K(p_1, p_2; p_3, p_4) = K(p_3, p_4; p_1, p_2) \quad (4.21)$$

• genaue Herleitung von (4.17) aus BBGKY-Hierarchie:

s. M. Kardar, Statistical Physics of Particles