

Boltzmann-Gl:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} \mathbf{p} \cdot \nabla_q + \mathbf{F} \cdot \nabla_p \right) f(q, p, t) = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}}$$

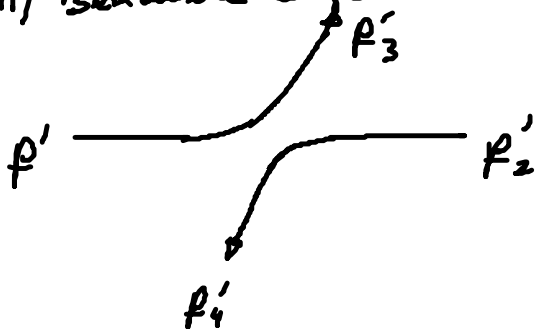
$$\text{mit } \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Stoß}} = \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 K(p, p_2; p_3, p_4) [f_3 f_4 - f f_2] \quad (4.17)$$

• Explizite Gestalt des Stoßterms:

(i) Impuls- und Energieerhaltung:

$$K(p, p_2; p_3, p_4) \sim \delta(p + p_2 - p_3 - p_4) \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_3^2}{2m} - \frac{p_4^2}{2m}\right)$$

(ii) Behandle Stoß im Schwerpt. system (')



$$p' + p_2' = 0 = p_3' + p_4'$$

Relativ koordinat: Streuung eines Teilchen am anderen
hier: 2 an 1

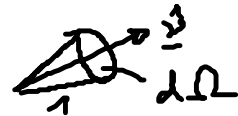
(vgl. Keplerproblem)

Inkretit des Teildestralls:

$I =$ Zahl der einfallenden Teilchen 2 mit Impuls p_2 pro Zeit und Fläche

$$= \underbrace{f(q, p_2)}_{f_2} d^3 p_2 |v - v_2|$$

$dN(\hat{v}) \dots$ ^{f_2} Zahl der pro Zeit in das Raumelement $d\Omega$ um Richtung \hat{v} gestreute Teilchen



→ differentieller Streuquerschnitt:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{I} \frac{dN}{d\Omega}} \quad (4.23)$$

$$dN = I d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

2.5 → Verlustterm:

$$V = - \int dN f(q, p, t) \stackrel{(4.23)}{=} - \int d\Omega \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| I f$$

$$= - \int d\Omega d^3 p_2 \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| |v - v_2| f f_2$$

$G = \dots$

$$\Rightarrow \boxed{\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}} = \int d^3 p_2 d\Omega \left| \frac{d\sigma}{d\Omega} \right| |v - v_2| \left[\underbrace{f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)}_{f_3 f_4} - \underbrace{f(q, p_1, t) f(q, p_2, t)}_{f f_2} \right]} \quad (4.24)$$

Rem: $f(q, p_3, t) f(q, p_4, t)$

über Erhaltungssätze verknüpft mit p, p_2

hier wichtig: nur von dem Stoß, molekulares Chaos⁴
d.h. keine Korrelationen

4.3.2 Das H-Theorem

$$\rightarrow \frac{dH}{dt} \leq 0 \quad \text{qed}$$

• Bemerkungen:

(i) $-H \sim$ Informationsentropie

$-H \sim$ Boltzmann-Entropie

für $f =$ Anzahl (s. Kap. 51)

H-Theorem ist
Bsp. für Entropie-
zuwachs

(ii) Grund für Irreversibilität:

(1) Annahme des molekularen Chaos

(2) „Vergrößerung“ der Längen- und Zeitskala

Verlust an
Information über
System

4.3.3. Gleichgewichtseigenschaften

(i) Gleichgewichtsverteilungen:

• Gas im Gleichgewicht, falls $\frac{dH}{dt} = 0$

$$(4.26) \rightarrow f_1 f_2 = f_3 f_4 \rightarrow \underbrace{\ln f_1 + \ln f_2}_{\substack{\text{vor} \\ \text{nach}}} = \underbrace{\ln f_3 + \ln f_4}_{\substack{\text{nach} \\ \text{vor}}} \text{Stoß}$$

erfüllt durch additive Größen, die bei Stoß erhalten:

→ Stoßinvarianten:

$$\chi^i = p_i \quad i = 1, 2, 3 \quad \dots \text{Impuls}$$

$$\chi^4 = \frac{p^2}{2m}$$

... kinetische Energie

$$\chi^5 = 1$$

... Teilchenzahl

(4.27)

$$\rightarrow \ln f = a(q) + \alpha(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m}$$

$$\rightarrow f(q, p) = N(q) \exp[\alpha(q) \cdot p - \beta(q) \frac{p^2}{2m}] \quad (4.28)$$

↑
 $e^{\alpha(q)}$

• lokales Gleichgewicht:

Normierung: $\int d^3 p f(q, p) = n(q, t)$... Teilchenzahldichte

$$\begin{aligned} n &\stackrel{(4.28)}{=} N(q) \left[\int d^3 p_i \exp(\alpha_i p_i - \beta \frac{p_i^2}{2m}) \right]^3 \\ &= N(q) \left[\int_{-\infty}^{\infty} d^3 p_i \exp\left\{ -\frac{\beta}{2m} \left(p_i - \frac{m \alpha_i}{\beta} \right)^2 + \frac{m \alpha_i^2}{2\beta} \right\} \right]^3 \\ n &= N(q) \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \exp\left(\frac{m \alpha^2}{2\beta} \right) \quad (4.28a) \end{aligned}$$

Umbenennung
in (4.28a) in
(4.28)

$$f(q, p, t) = n(q, t) \frac{1}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(p - m u(q, t))^2}{2m k_B T(q, t)} \right]$$

mit $n(q, t)$... Teilchenzahldichte

$k_B T(q, t) = \beta^{-1}$... lokale Temperatur (s.u.)

$m u(q, t) = \langle p \rangle = \frac{m \alpha}{\beta}$... lokaler mittlerer Impuls

(4.28)

... lokale Maxwell-Verteilung
" Gleichgewichtsverteilung