

## 4.4.1 Erhaltungssätze

### Erhaltungsgrößen.

$$\begin{aligned}
 \chi^5 = 1 &\rightarrow \text{Teilenzahldichte } n(q, t) = \int d^3p \, 1 \, f := \langle 1 \rangle \\
 \chi^i = p_i &\rightarrow \text{Impulsdichte} = m \times \text{Teilenzahldichte } j_i(q, t) \\
 & \quad j_i(q, t) = n(q, t) u_i(q, t) = \int d^3p \, \frac{p_i}{m} f = \langle \frac{p_i}{m} \rangle \\
 \chi^4 = \frac{p^2}{2m} &\rightarrow \text{Energiedichte:} \\
 & \quad n(q, t) \left[ \frac{m u^2(q, t)}{2} + e(q, t) \right] = \int d^3p \, \frac{p^2}{2m} f = \langle \frac{p^2}{2m} \rangle \\
 & \quad \text{mit } ne = \frac{m}{2} \int d^3p \, \left( \frac{p}{m} - u \right)^2 f = \langle \frac{m}{2} \underbrace{\left( \frac{p}{m} - u \right)^2}_{\leq} \rangle \\
 & \quad \text{wobei } \langle \epsilon \rangle = 0!
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Boltzmann-} \\
 \text{Gl.} \quad & \left[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \langle \chi^a \rangle}_{\text{Dichte}} + \underbrace{\nabla_q \cdot \frac{1}{m} \langle p \chi^a \rangle}_{\text{div (Stromdichte)}} = \underbrace{F \cdot \langle \nabla_p \chi^a \rangle}_{\text{Quelle / Senke}} \right] \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

... Bilanzgl. für Dichte  $\langle \chi^a \rangle$

Anwendung auf

(i) Teilenerhaltung:  $\chi^5 = 1 \xrightarrow{(4.32)} \xrightarrow{(4.33)}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_q \cdot j = 0 \\
 \text{mit } j = n u = \langle \frac{p}{m} \rangle
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

.. Kontinuitätsgleichung

(ii) Impulserhaltung:  $\chi^i = p_i \quad i = 1, 2, 3 \xrightarrow{(4.32)} \xrightarrow{(4.33)}$

$$m \frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{1}{m} \nabla_j \langle p_i p_j \rangle = n F_i \quad \text{mit } \nabla_i = (\nabla_q)_i$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\uparrow}$  weil  $F_j \nabla_j p_i = F_j \delta_{ij} = F_i$

$$m^2 \langle (u+\varepsilon)_i, (u+\varepsilon)_j \rangle \stackrel{\langle c_i, c_j \rangle = 0}{=} m^2 u_i u_j + m^2 \langle c_i, c_j \rangle$$

$$\underbrace{m \frac{\partial}{\partial t} j_i}_{\text{Impulsdichte}} + \underbrace{\nabla_j \left( \frac{m n u_i u_j - T_{ij}}{m j_i} \right)}_{\text{Impulsstromdichte}} = n F_i$$

$m n u_i u_j = m j_i u_j \dots$  konvektiver Anteil = Impulsdichte  $\times$  Geschw.  
 $T_{ij} = -m \langle c_i, c_j \rangle \dots$  Spannungstensor (= -Drucktensor)  
 $n F_i \dots$  Volumenkraftdichte äußerer Kräfte

(4.35)

Umschreibung: (4.35)

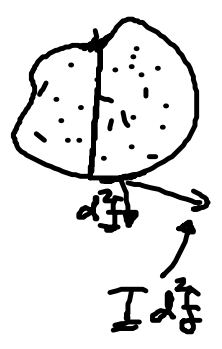
$$m \frac{\partial}{\partial t} n u_i + \nabla_j (m n u_i u_j)$$

$$= m n \frac{\partial}{\partial t} u_i + m u_i \frac{\partial}{\partial t} n + m u_i \nabla_j (n u_j) + m n u_j \nabla_j u_i$$

$$\stackrel{(4.34)}{=} m u_i \left( \frac{\partial}{\partial t} n + \nabla_j (n u_j) \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{m n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) u_i = \nabla_j T_{ij} + n F_i} \quad (4.36)$$

Massen-  $\underbrace{\text{konvektive}}_{\text{totale / materielle}} \underbrace{\text{Zeitableitung}}_{\text{Zeitableitung}}$   
 Oberflächenkräfte!  
 $\left[ \int_{\partial V} \nabla_j T_{ij} \stackrel{\text{Gibb}}{=} \int T_{ij} d^2 f_j ! \right]$   
 z.B. Druck- / Reibungskräfte



(4.36)  $\equiv$  Newtonsche Grundgleichung

linke Seite: Beschleunigung eines Volumenelements mit Geschw.  $\underline{u}$

$$\text{denn: } \frac{d}{dt} u_i(q, t) = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{q_j}_{u_j} \nabla_j u_i$$

rechte Seite: Oberflächen + äußere Kräfte auf Vol. element (=innere)

(iii) Energieerhaltung:  $\chi^4 = \frac{p^2}{2m}$

$$(1) \frac{1}{m} \langle p_i \chi^5 \rangle = \langle (u_i + c_i) \frac{p^2}{2m} \rangle \quad u_j^2 + 2u_j c_j + c_j^2$$

$$= u_i \langle \frac{p^2}{2m} \rangle + \frac{m}{2} \langle c_i (u_j + c_j)^2 \rangle$$

$$\stackrel{(4.32)}{=} n u_i \left( \frac{m}{2} u^2 + e \right) + m u_j \underbrace{\langle c_i c_j \rangle}_{-u_j T_{ij}} + \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$$

$\langle c_i \rangle = 0$

$$(2) \langle \nabla_p \frac{p^2}{2m} \rangle = \langle \frac{p}{m} \rangle = \underline{j} = n \underline{u} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ n \left( \frac{m}{2} u^2 + e \right) \right] + \nabla_i \left[ n u_i \left( \frac{m}{2} u^2 + e \right) - T_{ij} u_j + q_i \right] = \underline{j} \cdot \underline{E}$$

Energiedichte
Leistung der

kinetischer Anteil
innere Kräfte
Wärmestrom
äußere Kräfte

mit (4.12) in (4.33)  $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \langle \frac{p^2}{2m} \rangle$

mit  $q_i = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle$  ... Wärmestromdichte (4.37b)

Umformung mit Hilfe von (4.34) & (4.36): o.K.

$$\rightarrow n \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \right) e = - \underline{\nabla} \cdot \underline{q} + T_{ij} \nabla_i u_j \quad (4.38)$$

zeitl. Änderung der inneren Energie für bewegtes Vol. element
Wärmefluss
mechan. Leistung der inneren Kräfte

[Ugl.: innere Energie dU = dQ + dW]

#### 4.4.2 Hydrodynamische Gleichungen ohne Dissipation

- Materialgesetze für Spannungstensor  $\underline{T}$  und Wärmestromdichte  $\underline{q}$  und  $\underline{e}$ :  
≡ explizite Bedingung mit  $f(q, p, t)$

Annahme: lokales GG:

$$f_0(\underline{q}, p, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\underline{p} - m\underline{u})^2}{2m k_B T}\right] \quad (4.29)$$

mit  $n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(q, t)$   $\underbrace{\quad}_{\underline{c} = \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}} \left[-\frac{c^2}{2k_B T/m}\right]$

Bemerkung:  $\left. \frac{df_0}{dt} \right|_{\text{stet}} = 0$ , aber  $(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \nabla_q + \underline{F} \cdot \nabla_p) f_0 \neq 0$