

## 4.4.2 Hydrodynam. Gleichungen ohne Dissipation

•  $\underline{I}, \underline{q}, e$  ?

→ lokales GG:

$$f_0(\underline{q}, \underline{p}, t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\left[-\frac{c^2}{2k_B T/m}\right] \quad (4.29)$$

wobei  $\underline{c} = \underline{p} - \underline{u}$

$$n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(\underline{q}, t)$$

(4.40)

• Berechnung der Mittelwerte: (4.39)

$$\langle c_i c_j \rangle_0 = n \frac{k_B T}{m} S_{ij}$$

$$T_{ij}^0 = -m \langle c_i c_j \rangle_0 = -P S_{ij}$$

$$P = n k_B T, \quad n = \frac{N}{V}$$

... ideales Gasgesetz

$$q_i^0 = \langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \rangle = 0$$

$$ne = \frac{m}{2} \langle c^2 \rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T$$

... kalorische Zustandsgl.

⇒ explizit Erhaltungssätze:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}_q \quad (4.41)$$

(4.34) →

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -\underline{\nabla}_q \cdot (n \underline{u})$$

(4.42)

(4.36) →  $\underline{\nabla}_j T_{ij} = -\underline{\nabla}_i P$

$$m n \frac{d}{dt} \underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + n \underline{E}, \quad P = n k_B T$$

(4.43)

(4.38) →

$$\frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}$$

(4.44)

$$\left[ n \frac{d}{dt} e = -\underline{\nabla}_q \cdot \underline{q} + T_{ij} \underline{\nabla}_i u_j \right]$$

• Bemerkungen:

(1) Gl. (4.42) - (4.44) invariant unter Zeitumkehr ( $t \rightarrow -t$ ,  $\underline{u} \rightarrow -\underline{u}$ )

→ enthalten keine Dissipation

→ Störungen des GG-Zustandes relaxieren nicht gegen Null!

(2) Verständlich:

$$(4.42) \rightarrow \frac{d}{dt} n = -n \nabla_{\underline{q}} \cdot \underline{u} \rightarrow \nabla_{\underline{q}} \cdot \underline{u} = -\frac{1}{n} \frac{d}{dt} n = -\frac{d}{dt} \ln n$$

$$\text{in (4.44)} \rightarrow \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \rightarrow \frac{3}{2} \frac{1}{T} \frac{d}{dt} T = \frac{d}{dt} \ln n$$

$$\frac{d}{dt} \ln T \rightarrow 0 = \frac{d}{dt} (\ln n - \ln T^{3/2})$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \ln(n T^{-3/2}) = 0!$$

~ lokale Entropie des Gases (o.B.)  
ändert sich nicht!

(3) (4.43)  $\equiv$  Eulersche Gl.

Behandlung von Strömungen

kompressibler Gase

• Modenanalyse von (4.42) - (4.44): s. Übung

$$(i) \text{ Setze: } n = \bar{n} + S_n(q, t)$$

$$T = \bar{T} + S_T(q, t)$$

$$\underline{u} = \underline{0} + \underline{u}(q, t)$$

↑  
homogener  
Grundzustand

↑  
keine  
Abweichung

(ii) linearisiere (4.42) - (4.44) in  $\delta u, \delta T, \underline{u}$

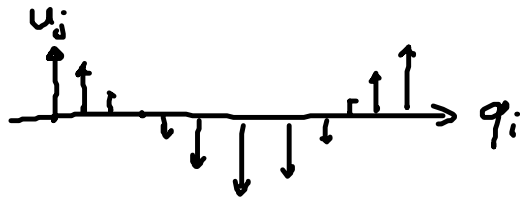
$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ - & \cdot & \cdot \\ - & & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix}$$

(iii) löse durch Modenansatz:

$$\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta u(k, \omega) \\ \delta T(k, \omega) \\ \underline{u}(k, \omega) \end{pmatrix} e^{-i(\omega t - k \cdot \underline{q})} \longrightarrow \underline{D}(k, \omega) \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta T \\ \underline{u} \end{pmatrix} = 0$$

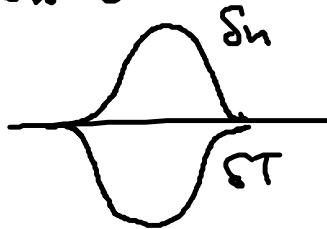
det D = 0 Dispersionsrelation:  $\omega = \omega(k)$

(iv) Ergebnisse: 2 statische Sclarmoden:  $\omega_{1/2} = 0$



1 statische Temp / Biegemode:  $\omega_3 = 0$

$$\underline{\nabla} \delta T + \frac{\bar{T}}{h} \underline{\nabla} \delta u = 0!$$



2 Schallwellen.

$$\omega_{4/5} = \pm c_s |k|$$

mit  $c_s = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{k_B T}{m}}$  ... Schallgeschw.  
 $\underline{u} \parallel \underline{k}$

### 4.4.3 Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation

• Boltzmann-Gl.:  $\mathcal{L}[f] = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}}$

mit  $\mathcal{L}[f] = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m} \underline{p} \cdot \underline{\nabla}_q + \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_p \right]$  (4.45)

$\left( \frac{\underline{p}}{m} = \underline{u} + \underline{\epsilon} \right) = \left[ \frac{d}{dt} + \underline{\epsilon} \cdot \underline{\nabla}_q + \frac{1}{m} \underline{F} \cdot \underline{\nabla}_c \right]$

• Problem: lokales GG, mit  $f_0$  aus (4.28)

$$\left. \frac{df_0}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}} = 0, \text{ aber } \mathcal{L}[f_0] \neq 0$$

• Naherungsg: "1. Ordnung"

(i)  $f = f_0(1 + \Delta)$  mit  $\Delta \ll 1$

(ii) Relaxationszeitnaherung fur Sto\sssystem:

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{\text{Sto\ss}} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta = \mathcal{L}[f_0] + \mathcal{L}[f_0 \Delta]$$

in Gl. (4.45):  $\mathcal{L}[f_0 + f_0 \Delta] = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$  &  $\mathcal{L}[f_0 \Delta] \ll \mathcal{L}[f_0]$

$$\rightarrow \mathcal{L}[f] \approx \mathcal{L}[f_0]$$

$$\rightarrow \left[ \Delta \approx -\tau \frac{1}{f_0} \mathcal{L}[f_0] = -\tau \mathcal{L}[\ln f_0] \right] \quad (4.46)$$

bestimme  $\mathcal{L}[\ln f_0]$  & Annahme:  $n(q,t), u(q,t), T(q,t)$   
 losen (4.42) - (4.44)

o.B.  $\rightarrow$

$$f = f_0(1 + \Delta) \quad (4.47)$$

$$\text{mit } \Delta = -\tau \frac{m}{k_B T} \left( c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3} c^2 \right) D_{ij} - \tau \left( \frac{m c^2}{2 k_B T} - \frac{5}{2} \right) \frac{c_i}{T}$$

$\left. \frac{D_{ij}}{T} \right\}$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \dots \text{Deformationsrate}$$

• Mittelwerte:

$$\langle A \rangle = \int d^3p A f_0(1+\Delta) = \langle A(1+\Delta) \rangle_0 \quad (4.48)$$

• Spannungstensor „1. Ordnung“: [in  $D_{ij}$ ]

$$T_{ij} \stackrel{(4.35)}{=} -m \langle c_i c_j \rangle \stackrel{(4.47)}{=} -m \left[ \langle c_i c_j \rangle_0 - \frac{Tm}{h_B T} \left\langle c_i c_j \left( c_k c_l - \frac{\delta_{kl}}{3} s^2 \right) \right\rangle_0 \right]$$

o.B.  $\rightarrow$

$$T_{ij} = -p \delta_{ij} + \underbrace{2\eta \left( D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kl} \right)}_{T'_{ij} \dots \text{viskoser Spannungstensor}} \quad (4.49)$$

mit  $p = n h_B T \dots$  Druck  
 $\eta = n h_B T \tau \dots$  Scherviskosität

$$\langle c_i c_j \rangle_0 = n \frac{h_B T}{m} \delta_{ij}$$

$$\langle c_i c_j c_k c_l \rangle_0 = n \left( \frac{h_B T}{m} \right)^2 \times (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$