4.4.2 Hydrodynam. Gleichungen ohne Dissipation

- $\underline{I}, q, e$?

$\longrightarrow$ lokales GG:

$$f_0(q,p,t) = \frac{n}{[2\pi m k_B T]^{3/2}} \exp\left[-\frac{\underline{c}^2}{2k_B T/m}\right] \quad (4.29)$$

wobei $\underline{c} = \frac{\underline{p}}{m} - \underline{u}$

$$n, T, \underline{u} = n, T, \underline{u}(q,t)$$

- Berechnung der Mittelwerte:

$$\boxed{\langle c_i c_j \rangle_0 = n \frac{k_B T}{m} \delta_{ij}} \quad (4.39)$$

(4.40)

$$\boxed{\begin{aligned} &T^0_{ij} = -m\langle c_i c_j\rangle_0 = -P\,\delta_{ij} \\ &P = n k_B T \quad , \quad n = \frac{N}{V} \\ &\text{... ideales Gasgesetz} \\ &q_i^0 = \langle c_i \tfrac{m}{2} c_j^2 \rangle = 0 \\ &ne = \frac{m}{2}\langle \underline{c}^2\rangle_0 = \frac{3}{2} n k_B T \\ &\text{... kalorische Zustandsgl.} \end{aligned}}$$

$\Longrightarrow$ explizit Erhaltungssätze: $\boxed{\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}_q}$ (4.41)

$$\boxed{\begin{aligned} &(4.34) \longrightarrow && \frac{\partial}{\partial t} n = -\underline{\nabla}_q \cdot (n\underline{u}) && (4.42) \\ &(4.36) \xrightarrow{\nabla_j T_{ij} = -\nabla_i P} && mn\frac{d}{dt}\underline{u} = -\underline{\nabla}_q P + n\underline{F} \quad , \quad P = n k_B T && (4.43) \\ &(4.38) \longrightarrow && \frac{d}{dt} T = -\frac{2}{3} T \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} && (4.44) \end{aligned}}$$

$$\left[n \frac{d}{dt} e = -\nabla_q \cdot q + T_{ij}\nabla_i u_j\right]$$

- Bemerkungen:

(1) Gl. (4.42) – (4.44) invariant unter Zeitumkehr ($t \to -t$, $\underline{u} \to -\underline{u}$)

$\longrightarrow$ enthalten <u>keine</u> Dissipation

$\longrightarrow$ Störungen des GG-Zustandes relaxieren <u>nicht</u> gegen Null!

(2) Verdeutlichung:

$$(4.42) \longrightarrow \frac{d}{dt} n = -n \nabla_q \cdot \underline{u} \longrightarrow \nabla_q \cdot \underline{u} = -\frac{1}{n}\frac{d}{dt} n = -\frac{d}{dt} \ln n$$

$$\xrightarrow{\text{in } (4.44)} \frac{d}{dt} T = \frac{2}{3} T \frac{d}{dt} \ln n \longrightarrow \frac{3}{2} \underbrace{\frac{1}{T}\frac{d}{dt} T}_{\frac{d}{dt}\ln T} = \frac{d}{dt} \ln n \longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}(\ln n - \ln T^{3/2})$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\ln (n T^{-3/2})}_{\sim \text{lokale Entropie des Gases (o.B.)}} = 0 !$$

änderte sich nicht!

(3) (4.43) ≡ Eulersche Gl.

Behandlung von Strömungen kompressibler Gase

- Modenanalyse von (4.42) – (4.44): s. Übungen

(i) Setze:

$$n = \bar{n} + \delta n(q,t)$$
$$T = \bar{T} + \delta T(q,t)$$
$$\underline{u} = \underbrace{0}_{\text{homogener Grundzustand}} + \underbrace{\underline{u}(q,t)}_{\text{kleine Abweichung}}$$

(ii) linearisiere (4.42) – (4.44) in δn, δT, $\underline{u}$

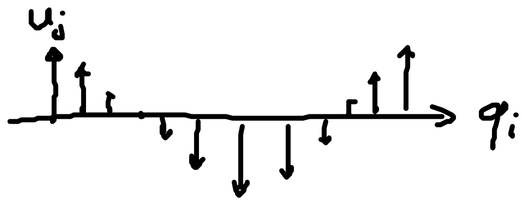
$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\delta n\\ \delta T\\ \underline{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdot & \cdot & \cdot\\ - & - & -\\ - & & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta n\\ \delta T\\ \underline{u}\end{pmatrix}$$

(iii) löse durch Modenansatz:

$$\begin{pmatrix}\delta n\\ \delta T\\ \underline{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\delta n(\underline{k},\omega)\\ \delta T(\underline{k},\omega)\\ \underline{u}(\underline{k},\omega)\end{pmatrix} e^{-i(\omega t - \underline{k}\cdot\underline{q})} \longrightarrow \underline{\underline{D}}(\underline{k},\omega)\begin{pmatrix}\delta n\\ \delta T\\ \underline{u}\end{pmatrix} = 0$$

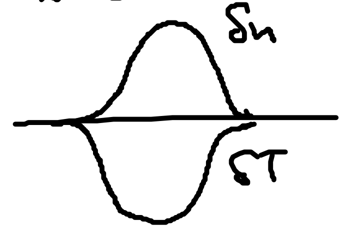
$\xrightarrow{\det \underline{\underline{D}}=0}$ Dispersionsrelation: $\omega = \omega(\underline{k})$

(iv) Ergebnisse: 2 statische Schermoden: $\omega_{1/2} = 0$



1 statische Temp/Dichtemode: $\omega_3 = 0$

$$\underline{\nabla}\,\delta T + \frac{\bar{T}}{\bar{n}}\,\underline{\nabla}\,\delta n = 0\,!$$



2 Schallwellen:

$$\omega_{4/5} = \pm c_s |\underline{k}|$$

mit $c_s = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{k_B T}{m}}$ ... Schallgeschw.

$\underline{u} \parallel \underline{k}$

4.4.3 Hydrodynamische Gleichungen mit Dissipation

• Boltzmann-Gl.:
$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}[f] &= \frac{df}{dt}\Big|_{\text{Stoß}} \\ \text{mit}\quad \mathcal{L}[f] &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m}\underline{p}\cdot\underline{\nabla}_q + \underline{F}\cdot\underline{\nabla}_p\right] \\ \left(\tfrac{\underline{p}}{m} = \underline{u}+\underline{c}\right)\quad &= \left[\frac{d}{dt} + \underline{c}\cdot\underline{\nabla}_q + \frac{1}{m}\underline{F}\cdot\underline{\nabla}_c\right] \end{aligned}} \qquad (4.45)$$

• Problem: lokales GG, mit f_0 aus (4.29)
$$\frac{df_0}{dt}\Big|_{\text{Stoß}} = 0, \quad \text{aber } \mathcal{L}[f_0] \neq 0$$

• Näherungslsg: „1. Ordnung"

(i) $f = f_0(1+\Delta)$ mit $\Delta \ll 1$

(ii) Relaxationszeitnäherung für Stoßterm:
$$\frac{df}{dt}\Big|_{\text{Stoß}} = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta \qquad = \mathcal{L}[f_0] + \mathcal{L}[f_0\Delta]$$

in Gl. (4.45): $\mathcal{L}[f_0 + f_0\Delta] = -\frac{1}{\tau} f_0 \Delta$ & $\mathcal{L}[f_0\Delta] \ll \mathcal{L}[f_0]$

$$\longrightarrow \mathcal{L}[f] \approx \mathcal{L}[f_0]$$

$$\longrightarrow \boxed{\Delta \approx -\tau \frac{1}{f_0}\mathcal{L}[f_0] = -\tau\, \mathcal{L}[\ln f_0]} \qquad (4.46)$$

berechne $\mathcal{L}[\ln f_0]$ & Annahme: $n(q,t)$, $\underline{u}(q,t)$, $T(q,t)$ lösen (4.42)–(4.44)

o.B. $\rightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned} &f = f_0(1+\Delta) \qquad\qquad (4.47) \\ &\text{mit } \Delta = -\tau \frac{m}{k_B T}\left(c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3}\underline{c}^2\right) D_{ij} - \tau\left(\frac{m\underline{c}^2}{2k_B T} - \frac{5}{2}\right)\frac{c_i}{T}\nabla_i T \end{aligned}}$$

$D_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ … Deformationsrate

• Mittelwerte:

$$\boxed{\langle A\rangle = \int d^3p\, A f_0 (1+\Delta) = \langle A(1+\Delta)\rangle_0} \quad (4.48)$$

• Spannungstensor „1. Ordnung": $[\text{in } D_{ij}]$

$$T_{ij} \overset{(4.35)}{=} -m\langle c_i c_j\rangle \overset{(4.47)}{=} -m\Big[\langle c_i c_j\rangle_0 - \frac{\tau m}{k_B T}\langle c_i c_j (c_k c_l - \frac{\delta_{kl}}{3} c^2)\rangle_0 D_{kl}\Big]$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\boxed{T_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \underbrace{2\eta\left(D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} D_{kl}\right)}_{T'_{ij} \text{ ... viskoser Spannungstensor}}} \quad (4.49)$$

mit $p = n k_B T$ ... Druck

$\eta = n k_B T \tau$ ... Scherviskosität

$\langle c_i c_j\rangle_0 = n \frac{k_B T}{m}\delta_{ij}$

$\langle c_i c_j c_k c_l\rangle = n\left(\frac{k_B T}{m}\right)^2 \times (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$