4.4.3 Hydrodynam. Gln. mit Dissipation

- $$\boxed{\begin{aligned} & f = f(1+\Delta) \\ & \text{mit } \Delta = -\tau \frac{m}{k_B T}\left(c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3} c^2\right) D_{ij} - \tau \left(\frac{m c^2}{2 k_B T} - \frac{5}{2}\right) \frac{c_i}{T} \nabla_i T \end{aligned}} \qquad (4.47)$$

$D_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$ ... Deformations-rate

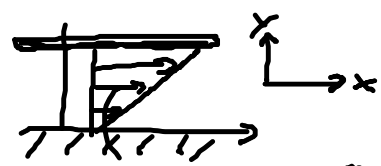
- Mittelwerte:

$$\boxed{\langle A \rangle = \int d^3p \, A f_0 (1+\Delta) = \langle A(1+\Delta)\rangle_0} \qquad (4.48)$$

- Spannungstensor:

$$\boxed{\begin{aligned} T_{ij} &= -m \langle c_i c_j \rangle \\ &= -p\,\delta_{ij} + \underbrace{2\eta\left(D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} D_{kk}\right)}_{T'_{ij} \text{... viskose Spannungstensor}} \\ & \text{mit} \quad p = n k_B T \text{... Druck} \\ & \qquad \eta = n k_B T \tau \text{ ... Scherviskosität} \end{aligned}} \qquad (4.49)$$

<u>Deutung:</u> (i) <u>Scherströmung:</u>



$q = (x, y, z)$

- $D_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij} D_{kk} \neq 0$ $\quad \frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0$

$\longrightarrow T'_{ij}$

- <u>nicht</u> zeitumkehr invariant: $\underline{\underline{T}}'(-D_{ij}) = -\underline{\underline{T}}'(D_{ij})$

$\longrightarrow$ Dissipation

$\longrightarrow$ Relaxation von Schermoden ins GG

$D_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$

- $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{D}} = D_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\,\underline{u}$ .... Spur von $\underline{\underline{D}}$

<u>also:</u> $\underline{\underline{D}} - \frac{1}{3} \mathbb{1}\, \mathrm{div}\,\underline{u} = 0$ für $\underline{\underline{D}} = \frac{1}{3}\mathbb{1}\,\mathrm{div}\,\underline{u}$

NB: $(4.42) \longrightarrow \frac{d}{dt} n = - n \operatorname{div} \underline{u}$

$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n u) = 0$ also: $\operatorname{div} \underline{u} = 0 \;\hat{=}\;$ inkompressible Strömung

(ii) <u>keine</u> extra Volumenviskosität

<u>kein</u> Beitrag: $T'_{ij} \sim D_{ii} = \operatorname{div} \underline{u}$

$$T'_{ij} = \underbrace{2\eta \left(D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right)}_{\text{Scherung}} + \underset{\substack{\| \\ 0 \text{ hier}}}{\eta_k} \overbrace{D_{kk} \delta_{ij}}^{\text{Kompression}}$$

• Wärmestromdichte „1. Ordnung":

$$q_i \overset{(4.38)}{=} \left\langle c_i \frac{m}{2} c_j^2 \right\rangle \underset{\uparrow\, \langle \ldots (1+\Delta) \rangle_0}{\overset{(4.47)}{=}} - \frac{m\tau}{2} \left\langle \left(\frac{mc^2}{2k_BT} - \frac{5}{2} \right) c_i c_k \underline{c}^2 \right\rangle_0 \frac{\nabla_k T}{T}$$

$\xrightarrow{\text{o.B.}}$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{q} &= - \varkappa \, \underline{\nabla}_q T \\ \text{mit } \varkappa &= \frac{5}{2} n \frac{k_B^2 T}{m} \tau \end{aligned}} \quad (4.50)$$

... therm. Leitfähigkeit

$\underline{q} \sim - \underline{\nabla}_q T \longrightarrow \underline{q}$ gleicht $\underline{\nabla}_q T$ aus

$\longrightarrow$ Relaxation ins GG

• Hydrodynamische Gleichungen:

$(4.34) \longrightarrow \quad \frac{\partial n}{\partial t} = - \underline{\nabla}_q \cdot (n \underline{u}) \qquad (4.51)$

$(4.36) \xrightarrow{\nabla_i T_{ij}} \quad mn \frac{d}{dt} \underline{u} = - \underline{\nabla}_q P + \eta \underline{\nabla}_q^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \eta \underline{\nabla}_q (\underline{\nabla}_q \cdot \underline{u}) \qquad (4.52)$

(4.38) $\underline{ne = \frac{m}{2} \langle \underline{c}^2 \rangle = \frac{3}{2} n k_B T}$, $-\underline{\nabla}_q \cdot \underline{q}$, $T_{ij} \nabla_i u_j$

$$\frac{d}{dt} T = \underbrace{\frac{2\varkappa}{3nk_B} \nabla_q^2 T}_{\text{von } -\underline{\nabla}_q \cdot \underline{q}} - \frac{2}{3} T \underline{\nabla}_q \cdot \underline{u} + \underbrace{\frac{2}{3nk_B} T'_{ij} \nabla_i u_j}_{\text{von } T_{ij} \nabla_i u_j} \qquad (4.53)$$

Bem: (1) Gl. (4.52) $\equiv$ Navier-Stokes-Gl. für kompressible Flüssigkeiten

aber: Viskosität für reine Kompression: $\eta_k + \frac{1}{3}\eta$ statt $\frac{1}{3}\eta$!

(2) Gl. (4.53): für $\nabla_i u_j = 0 \longrightarrow$ reine Diff.-Gl. für T

$T_{ij}'\nabla_i u_j$ ... nichtlineare Terme in $\underline{u}$!

- Modenanalyse: (wie in Kap. 4.4.2)

  2 diffusive Schermoden:

  Dispersionsrelation: $\omega_{1/2} = -i\frac{\eta}{m\bar{n}}k^2$ ($\bar{n}$ ... mittlere Dichte)

  Dämpfungsrate: $-i\omega \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow 0$

$e^{-\underbrace{\frac{\eta}{m\bar{n}}k^2}_{-i\omega}t}$ ... exponentielle Dämpfung in der Zeit t

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$-i\omega \longrightarrow 0$ für $k \longrightarrow 0$

$\hat{=}$ hydrodynamische Moden

  1 diffusive „Temperaturmode" ω_3

  2 gedämpfte Schallwellen

$$\omega_{4/5} = \pm c_s k - i k^2\left(\frac{2\eta}{3m\bar{n}} + \frac{2\kappa}{15k_B\bar{n}}\right) + O(\tau^2)$$

5. Statistische Ensemble

- Ziel: $\boxed{\text{Zugang zu makroskop. Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen durch Mittelung über viele mikroskop. Realisierungen}}$

  insbesondere: $\underbrace{S, U, F, H, G, \ldots}_{\text{thermodynam. Potentiale}}$

- Weg: Wähle Ensemble von Mikrozuständen durch Randbedingungen
  $\longrightarrow$ Charakterisiere die Makrozustände

- **Beachte:** $\boxed{\text{Im thermodynam. Limes } N \to \infty \text{ sind alle Ensemble äquivalent}}$

5.1 Mikrokanonisches Ensemble

- **Def.:** Alle zugängliche Mikrozustände eines abgeschlossenen Systems (also mit Energie U = konstant, und $V, N \ldots$ = konstant) bilden das mikrokanon. Ensemble