

### 4.4.3 Hydrodynam. Gln. mit Dissipation

$$f = f(1 + \Delta) \quad (4.47)$$

$$\text{mit } \Delta = -\tau \frac{m}{k_B T} (c_i c_j - \frac{\delta_{ij}}{3} c^2) D_{ij} - \tau \left( \frac{m c^2}{2 k_B T} - \frac{5}{2} \right) \frac{c_i}{T} \nabla_i T$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \dots \text{Deformationsrate}$$

• Mittelwerte:

$$\langle A \rangle = \int d^3 p A f_0(1 + \Delta) = \langle A(1 + \Delta) \rangle_0 \quad (4.48)$$

• Spannungstensor:

$$T_{ij} = -m \langle c_i c_j \rangle$$

$$= -P \delta_{ij} + \underbrace{2\gamma (D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk})}_{T'_{ij} \dots \text{viskose Spannungstensor}}$$

mit  $P = n k_B T \dots$  Druck

$\gamma = n k_B T \tau \dots$  Scharviskosität

(4.49)

Deutung: (i) Scherströmung:



$$\cdot D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk} \neq 0$$

$$\rightarrow T'_{ij}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} \neq 0$$

$$q = (x, y, z)$$

• nicht zeitumkehrinvariant:  $\underline{T}'(-D_{ij}) = -\underline{T}'(D_{ij})$

→ Dissipation

→ Relaxation von Schermoden ins GG

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) \cdot \text{Sp } \underline{D} = D_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div } \underline{u} \dots \text{Spur von } \underline{D}$$

also:  $\underline{D} - \frac{1}{3} \mathbb{1} \text{div } \underline{u} = 0$  für  $\underline{D} = \frac{1}{3} \mathbb{1} \text{div } \underline{u}$

NB: (4.42)  $\rightarrow \frac{d}{dt} n = -n \operatorname{div} \underline{u}$   
 $\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\underline{u}) = 0$  also:  $\operatorname{div} \underline{u} = 0 \hat{=} \text{incompressible Strömung}$

(ii) keine extra Volumenviskosität

kein Beitrag:  $T'_{ij} \sim D_{ij} = \operatorname{div} \underline{u}$

$$T'_{ij} = \underbrace{2\eta \left( D_{ij} - \frac{1}{3} D_{kk} \delta_{ij} \right)}_{\text{Scherung}} + \underbrace{\eta_k D_{kk} \delta_{ij}}_{\substack{\text{Kompression} \\ 0 \text{ hier}}}$$

• Wärmestromdichte 1. Ordnung:

$$q_i \stackrel{(4.37)}{=} \left\langle c_i \frac{m}{2} \langle c_j^2 \rangle \right\rangle \stackrel{(4.47)}{=} - \frac{mT}{2} \left\langle \left( \frac{m \langle c^2 \rangle}{2k_B T} - \frac{5}{2} \right) c_i c_k \right\rangle \frac{\nabla_k T}{T}$$

$\left\langle \dots (1+\Delta) \right\rangle_0$

o.B.  $\rightarrow$

$$q = -\kappa \nabla_q T \quad (4.50)$$

mit  $\kappa = \frac{5}{2} n \frac{k_B^2 T}{m} \tau \dots$  therm. Leitfähigkeit

$q \sim -\nabla_q T \rightarrow q$  gleicht  $\nabla_q T$  aus  
 $\rightarrow$  Relaxation ins GG

• Hydrodynamische Gleichungen:

(4.34)  $\rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla_q \cdot (n\underline{u}) \quad (4.51)$

(4.36)  $\xrightarrow{\nabla_i T_{ij}}$   $m n \frac{d}{dt} \underline{u} = -\nabla_q P + 2 \nabla_q^2 \underline{u} + \frac{1}{3} \eta \nabla_q (\nabla_q \cdot \underline{u}) \quad (4.52)$

(4.38)  $n \langle c^2 \rangle = \frac{3}{2} n k_B T$   
 $-\nabla_q \cdot q, T_{ij} \nabla_i u_j$

$$\frac{dT}{dt} = \underbrace{\frac{2\kappa}{3n k_B} \nabla_q^2 T}_{\text{von } -\nabla_q \cdot q} - \frac{2}{3} T \nabla_q \cdot \underline{u} + \underbrace{\frac{2}{3n k_B} T_{ij} \nabla_i u_j}_{\text{von } T_{ij} \nabla_i u_j} \quad (4.53)$$

Rem: (1) Gl. (4.52)  $\equiv$  Navier-Stokes-Gl. für incompressible Flüssigkeit

aber: Viskosität für reine Kompression:  $\eta_k + \frac{1}{3} \eta$  statt  $\frac{1}{3} \eta$ !

(2) Gl. (4.53): für  $\nabla_j u_j = 0 \rightarrow$  reine Diff.-Gl. für T

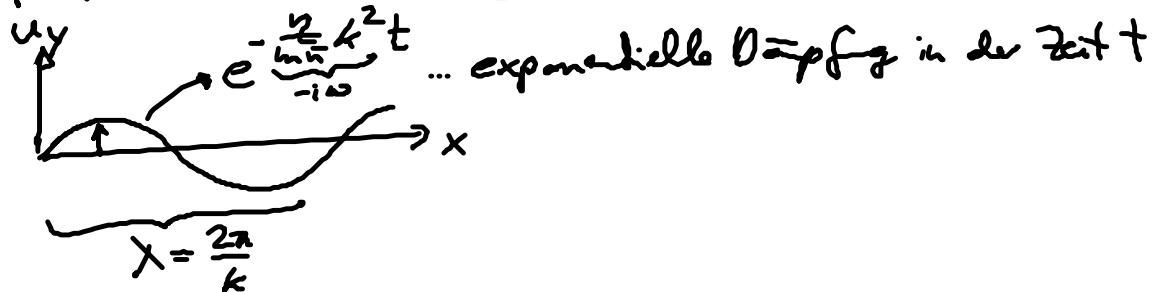
$T_{ij}' \nabla_j u_j \dots$  nichtlineare Terme in  $\underline{u}$ !

• Modalanalyse: (wie in Kap. 4.4.2)

2 diffusive Solarmoden:

Dispersionsrelation:  $\omega_{1/2} = -i \frac{\eta}{m \bar{n}} k^2$  ( $\bar{n} \dots$  mittlere Dichte)

Dämpfungsrate:  $-i\omega \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow 0$



$-i\omega \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow 0$   
 $\equiv$  hydrodynamische Moden

1 diffusive „Temperaturmode“  $\omega_3$

2 gedämpfte Schallwellen

$$\omega_{4/5} = \pm c_s k - i k^2 \left( \frac{2\eta}{3m\bar{n}} + \frac{2\kappa}{15k_B\bar{n}} \right) + O(\tau^2)$$

## 5. Statistische Ensemble

• Ziel: Zugang zu makroskop. Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen durch Mittelung über viele mikroskop. Realisierungen

insbesondere:  $S, U, F, H, G, \dots$   
thermodynam. Potentiale

• Weg: Wähle Ensemble von Mikrozuständen durch Randbedingungen  
 $\rightarrow$  Charakterisiere die Makrozustände

• Beachte: Im thermodynam. Limes  $N \rightarrow \infty$  sind alle Ensemble äquivalent

## 5.1 Mikrokanonisches Ensemble

• Def: Alle zugängliche Mikrozustände eines abgeschlossenen Systems (also mit  $E_{\text{gesamt}} = \text{konstant}$ , und  $V, N, \dots = \text{konstant}$ ) bilden das mikrokanon. Ensemble