

### 3. Grundbegriffe der Dynamik und Newton'sche Axiome

- Frage: Wie entsteht eine Bewegung, was ruft eine bestimmte Bk hervor?  
→ wollen Gesetze für  $\vec{r}(t)$  aufstellen.  
Wird eine DGl sein (Newton'sche Grundgesetz)
- Aufgabe: Dieses Gesetz für relevante Situationen lösen.

Für eine best. Gruppe von Exp. („klass. Mechanik“)  
hat Newton ein System v. Axiomen aufgestellt,  
das diese Exp. beschreibt und aus der  
Beobachtung abgeleitet wird.

#### 3.1 Newton'schen Axiome

1. Trägheitsgesetz

Es gibt ein KS, in demen sich ein kräftefreier MP mit konst. Geschwindigkeit bewegt. Diese KS nennt man Inertialsysteme.

## 2. Newton'sche Grundgesetz

Die Änderung des Impulses ist gegeben durch die Einwirkung der bewegenden Kraft und geschieht in Richtung der Kraft.

## 3. actio = reactio

Die Kraft mit der die Umgebung auf einen MP wird, entspricht stets eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft, mit der der MP zurückwirkt.

• Bemerkungen:

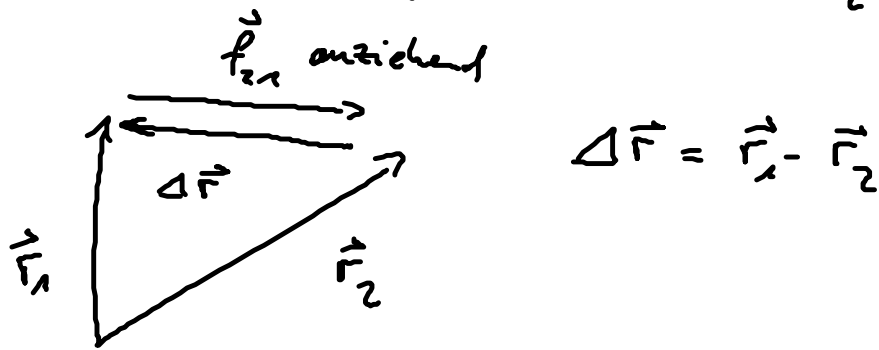
(a) Kraft als neuer Begriff eingeführt  
→ aus Alltagserfahrung:

benötige Kraft um Körper zu beschleunigen.

- Newton: Grav. Kraft von MP2 auf MP1:

$$\vec{f}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{\underbrace{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}_{\text{Abstands-quadrat}}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}}_{\text{EV in Richtung von } \vec{r}_2 \text{ nach } \vec{r}_1}$$

G - Grav. konst.  
 $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$



- Reibungskraft:  $\vec{f}_R = -\gamma_u \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \cdot v^u$

$\gamma_u$  - Reibungskonst

u - aus Exp. festzulegende Potenz

(6) Impuls

Definition:  $\vec{p} = m \vec{v}$

Masse als Prop. Faktor

(c) Newton'sche Grundgesetze (2. Axiom)

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} (m \vec{v}) \xrightarrow{m=\text{const}} \vec{f} = m \vec{a}$$

$$\vec{f} = 0 \rightarrow m \vec{v} = \text{const}$$

(d) IS ist ein KS in dem die Newton'schen Axiome gelten, kann z.B. anhand der Fixsterne kon-

struiert werden. Muß man als exp. Tatsache  
hinnehmen.

Ein KS, das mit der Erde verbunden ist,  
rotiert in Bezug auf dieses LS und ist  
damit beschleunigt.

(c) Das NKG ist eine DGL 2. Ordnung für  
jede Vektor Komponente der BK  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} (u \vec{v}) = \frac{d}{dt} \left( u \frac{d}{dt} \vec{r} \right)$$

Bei bekannter Kraft und bekannten AB  
( $\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0$ ) kann die vollst. BK berechnet werden.

Im Allgem.:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} + \vec{f}(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) &= 0 \\ (\ddot{x}_i + f_i(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t) &= 0) \end{aligned}$$

→ 2 konst. Parameter z. B.

Aufangsposition:  $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$

Aufangsgeschw.:  $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}(t_0)$

### 3.2 Einfache Anwendungen des NKG

(a) kräftefreie Bewegung (mit  $u = \text{const}$ )

$$\vec{f} = \frac{d}{dt} (u \vec{v}) = 0 \quad | \int$$

$$m \vec{v} = \text{const} = \vec{p}_0 \quad (\text{Trägheitsgesetz})$$

$$m \frac{d}{dt} \vec{r} = \vec{p}_0 \quad | \int$$

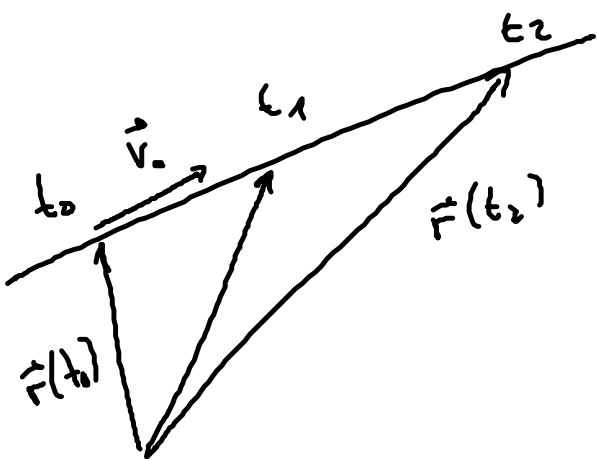
$$m \int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} \vec{r}(t') = \int_{t_0}^t dt' \vec{p}_0$$

$$m \vec{r}(t) \Big|_{t_0}^t = \vec{p}_0 t \Big|_{t_0}^t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \frac{\vec{p}_0}{m} (t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t - t_0)$$

gleichmäßig, gleichförmige  
Bewegung

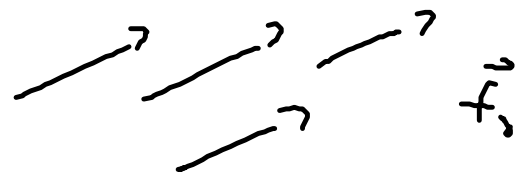


2 Konst.  $\vec{r}(t_0)$  a.  $\vec{v}(t_0)$

(6) zeitl. und räumlich konst. Kraft

$$\vec{f}_0 = \frac{d}{dt} m \vec{v} \quad | \int$$

$$\int_{t_0}^t dt' \vec{f}_0 = \int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} (m \vec{v})$$



$$f_0(t-t_0) = m(\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0))$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \frac{\vec{f}_0}{m}(t-t_0)$$

$t$   $\in$   $\frac{\vec{f}_0}{m}$  konst. Beschleunigung

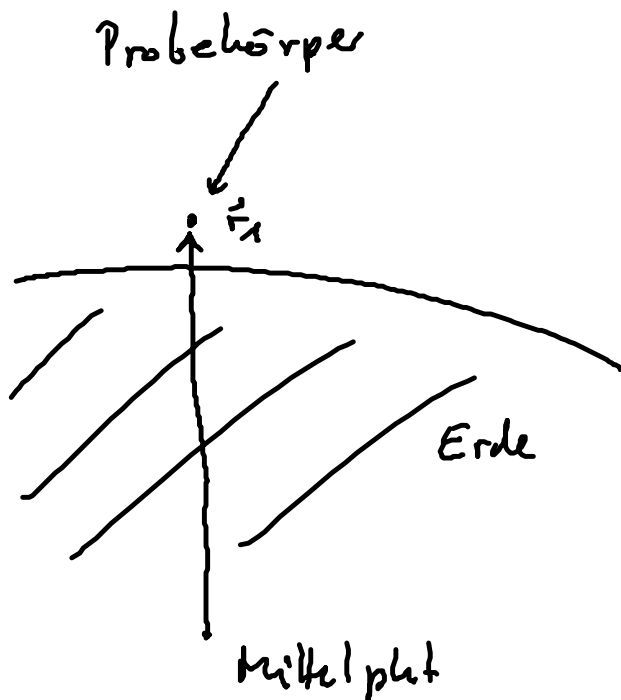
$$\int_{t_0}^t dt' \frac{d}{dt'} \vec{v}(t') = \int_{t_0}^t dt' \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t-t_0)$$

$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{\vec{a}_0}{2}(t-t_0)^2$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{\vec{a}_0}{2}(t-t_0)^2 \quad \text{gleichm. Besch. Bewegung}$$

(c) Grav. Kraft auf der Erde

Erinnerung:  $\vec{f}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$



$$\vec{f}_{E1} = -G m_1 \sum_u \frac{m_u}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_u|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_u}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_u|}$$

Summe über alle MP, die die Erde bilden

Gesamtmasse:  $\sum_u m_u = M$

erschern Erde durch MP bei  $\vec{r}=0$   
(später starrer Körper)

$$\vec{f}_{E1} = -G \frac{m_1 M}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_z m_1$$

$$|\vec{F}|^2 \sim R^2 \text{ (Erdradius) } \quad \text{Erdoberf.} \quad \overbrace{g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$\Rightarrow \text{ Grav. Kraft in z-Richtung: } \vec{F}_E^z = -g m_1$$

(d) Messung der Masse  $m$

erfolgt bzgl. einer Einheitsmasse  $m_E$

Beide Körper werden mit gleich Kraft beschleunigt:

$$\vec{F} = m_E \vec{a}_E \quad , \quad \vec{F} = m \vec{a} \quad \Rightarrow$$

↑ ↑  
gemeinsam gemessen

$$\frac{m}{m_E} = \frac{|\vec{a}_E|}{|\vec{a}|}$$

(e) träge und schwere Masse

(1) Newton'sche GG

$$\vec{F} = m_t \vec{a}$$

träge Masse

(2) Grav. gesetz

$$\vec{F} = m_s (-g \hat{e}_z)$$

schwere Masse

$$\text{also } m_t \ddot{z} = -m_s g \quad , \quad \text{alle Exp.: } m_s = m_t = m$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = -g \quad \text{„alle Körper fallen gleich schnell“}$$

$$(f) \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Kraft als Funkt. von Ort, Geschw. und Zeit

ausreichend für klass. Mechanik

### 3.3 Bilanzen und Erhaltungssätze

• Bilanz einer Größe  $X$ :

$$\frac{d}{dt} X = Y \quad \text{„zeitl. Änderung von } X\text{“} = Y$$

• Erhaltungssatz für  $X$ :

$$Y = 0 \Rightarrow X(t) = \text{const} \quad \text{„} X \text{ ist zeitl. const“}$$

(a) kinetische Energie, Leistung und Arbeit

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{f} \quad | \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$m \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}}_{=} = \vec{f} \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right)}_T = \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}}_N$$

T - kin. Energie

N - Leistung

• Bilanz der kin. En.  $T$ :  $\frac{d}{dt} T = N$

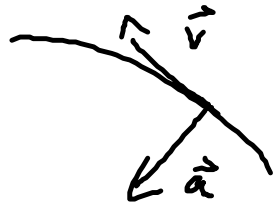
„zeitl. Änderung der kin. Energie  $T$  ist geg. durch Leistung  $N$ “

• Erhaltungssatz für die kin. En.:

$$N = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} T = 0 \Rightarrow T = \text{const}$$

• Beispiel: Kreisbewegung  $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = 0 = N$





$$\vec{v} \perp \vec{a}$$

hier ist kin. Erhalten

• Arbeit:  $N = \frac{d}{dt} A$

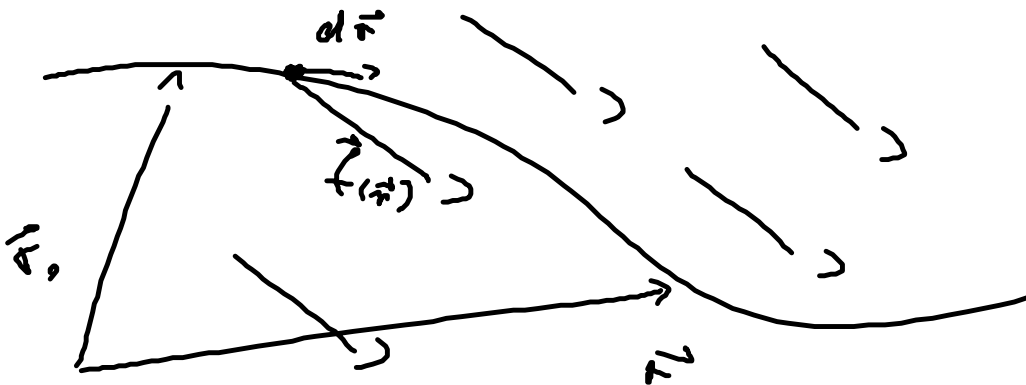
$$A = \int_{t_0}^t dt' N(t') = \int_{t_0}^t dt' \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{f}(\vec{r}(t'))$$

• Arbeit im Zeitintervall  $[t_0, t]$

$$= \int_{t_0}^t dt' \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \cdot \vec{f}(\vec{r}(t')) = \left. \begin{array}{l} \text{Variablentransf. } t' \rightarrow \vec{r} \\ \frac{d\vec{r}}{dt'} = \dot{\vec{r}} \rightarrow d\vec{r} = \dot{\vec{r}} dt' \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} \cdot \vec{f}(\vec{r}) \quad \hat{=} \text{ "Liniens-} \\ \text{integral"}$$

• Arbeit am MP bei Bewegung von  $\vec{r}_0$  nach  $\vec{r}$



• Darstellung:  $\int d\vec{r} \dots$  Wegintegral

• Darstellung:  $\int dt \dots$  Parameterdarstellung  
d. Linienintegrals

## (1) Energiesatz

Sehr oft findet man Kräfte mit:

$$- \vec{f}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} U(\vec{r}(t))$$

$\vec{f}_{\text{kons}}$  - kons. Kraft  
U - Potential, bzw.  
pot. Energie

Aufteilen bel. Kräfte:  $\vec{f} = \vec{f}_{\text{kons}} + \vec{f}_{\text{diss}}$

→ dissipative Kräfte formen i. A.  
wech. in andere En.formen um.

→ Bilanz für kin. Energie:

$$\frac{d}{dt} T = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f} = \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{f}_{\text{kons}} + \vec{f}_{\text{diss}})$$

Bsp. Reibung  
 $\vec{f} = -\gamma \cdot \dot{\vec{r}}$

$$\stackrel{(*)}{=} - \frac{d}{dt} U(\vec{r}) + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}_{\text{diss}}$$

• Energiebilanz:  $\frac{d}{dt} (T + U) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{f}_{\text{diss}}$

• Die zeitl. Änderung der ges. mechan. Energie ist  
geg. durch Leistung der diss. Kräfte "

• Energiesatz:

• Für rein konservative Kräfte ( $\vec{f}_{\text{diss}} = 0$ )

ist die mechan. Energie  $E = T + U$  konst.?

(c) Potential und kons. Kräfte:

$$\frac{d}{dt} U(\vec{r}(t)) = \frac{d}{dt} U(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx_1} U(\vec{r})}_{\substack{\partial_{x_1} U(\vec{r}) \\ \text{const.}}} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{d}{dx_2} U(\vec{r}) \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{d}{dx_3} U(\vec{r}) \cdot \frac{dx_3}{dt}$$

→ andere Schreibweise

$$\vec{f}_{\text{kons}} \cdot \dot{\vec{r}} = f_1 \cdot \dot{x}_1 + f_2 \cdot \dot{x}_2 + f_3 \cdot \dot{x}_3$$

$$\dot{\vec{r}} = - \frac{d}{dt} U(\vec{r}) = - \partial_{x_1} U \cdot \dot{x}_1 - \partial_{x_2} U \cdot \dot{x}_2 - \partial_{x_3} U \cdot \dot{x}_3$$

$$\Rightarrow f_i = - \frac{\partial}{\partial x_i} U(\vec{r})$$

kons. Kraft kann durch part. Ableitung des Potentials bestimmt werden.

$$\vec{f}_{\text{kons}} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U}{\partial x_3} \end{pmatrix} = - \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{Gradient}} U \quad (\text{Nabla Op. auf skalares Feld})$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{vektorieller Diff. operator "Nabla"}$$

Eine Kraft  $\vec{f}$  heißt konservativ, wenn sie sich als Gradient eines skalaren Feldes (des Potentials) schreiben lässt.

- wenn  $\vec{f}$  kons., so ist  $\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$ , also

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_2 f_3 - \partial x_3 f_2}{\partial x_3 f_1 - \partial x_1 f_3} \\ \frac{\partial x_1 f_2 - \partial x_2 f_1}{\partial x_2 (-\partial x_3 U) - \partial x_3 (-\partial x_2 U)} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = 0 \quad , \text{ da die 2. ten Ableitung vertauscht}$$

Eine Kraft  $\vec{f}$  hat genau dann ein Potential

$$\vec{f} = -\nabla U(\vec{r}), \text{ wenn } \text{rot } \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f} \text{ verschwindet.}$$

"in einfach zusammenhängenden Gebiet"

(d) Hauptsatz

Impulsbilanz:  $\frac{d}{dt} (m \vec{v}) = \vec{f}$  NGS

Impuls erhalt.:  $m \vec{v} = p = \text{const}$  falls  $\vec{f} = 0$

Solange keine Kräfte wirken, ist der Impuls eine Konst.

→ Kreis?  $\vec{f} \neq 0 \rightarrow$  kein Impulserhalt

(e) Drehimpuls

$$\vec{f} = m \ddot{\vec{r}} \quad | \quad \vec{r} \times$$

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{f}}_D = m \underbrace{\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_0 + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

Drehmoment:  $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{f}$

Drehimpuls:  $\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}$

Drehimpulsbilanz:  $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{D}$

-u- erhalt.:  $\vec{D} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{L} = 0$

. Kreisbewegung:  $\vec{f} = -u\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{f} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow D = 0$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \hat{v} = m \begin{pmatrix} R \cos \omega t \\ R \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega R \sin \omega t \\ \omega R \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

= ... =  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\omega R^2 \end{pmatrix}$  ist zeitl. konst